مثال: طول منحنی $y=\int_0^x \sinh t\,dt$ را از $x=0$ تا $x=1$ را بیابید؟ $y'=\sinh x$

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\sinh^2 x}\,dx \xrightarrow{\cosh^2 x-\sinh^2 x=1} \int_0^1\sqrt{\cosh^2 x}\,dx=\int_0^1\cosh x\,dx=(\sinh x)\Big|_0^1$$

$$=(\sinh(1)-\sinh(0))=\sinh(1)$$

نکته: طول منحنی تابع پارامتری $\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases},\ a\le t\le b$ از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$L=\int_a^b\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$$

مثال: طول منحنی $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=\cos t\end{cases}$ ، $0\le t\le 2\pi$ را بدست آورید؟ $x'_t=1-\cos t$ و $y'_t=-\sin t$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+(-\sin t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 t-2\cos t+\sin^2 t}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{\underbrace{2-2\cos t}_{2(1-\cos t)}}\,dt=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt \xrightarrow{1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}} \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

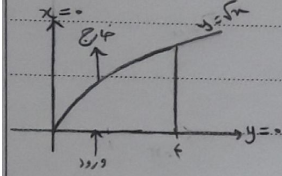
$$=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=2\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=-4(\cos\pi-\cos 0)=-4(-2)=8$$

نکته: $$\int_0^a\frac{(f(x)+f(a-x))-f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx=\int_0^a\left(1-\frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\right) \xrightarrow[\substack{x=0\to y=a\\ x=a\to y=0}]{\begin{bmatrix}y=a-x\\ dy=-dx\end{bmatrix}} a-\int_0^a\frac{f(y)\,dy}{f(y)+f(a-y)}$$

$$\Rightarrow\int\frac{f(y)\,dy}{f(y)+f(a-y)}=\frac{a}{2}$$

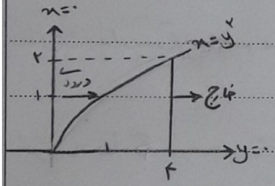
مثال: ناحیه ایجاد شده توسط $y=\sqrt{x}$ و $y=0$ از $x=0$ تا $x=4$ را در نظر بگیرید. مطلوبست

محاسبه حجم:




الف) دوران حول محور x ها: بالایی - پایینی

$$V=\pi\int_0^4 \left((\sqrt{x})^2-(0)^2\right)dx=\pi\int_0^4 x\,dx=\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^4$$
$$=8\pi$$




ب) دوران حول محور y ها: راستی - چپی

$$V=\pi\int_0^2 (16-y^2)\,dy=\left(16y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{88}{3}$$

۴) محاسبه طول منحنی: طول منحنی $y=f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ از فرمول زیر بدست می‌آید:

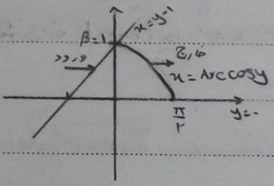
$$L=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dy$$

مثال: طول منحنی $y=\ln\cos x$ از $x=0$ تا $x=\frac{\pi}{4}$ را بیابید.

$$y'=-\frac{\sin x}{\cos x}=-tgx$$

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+(-tgx)^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+tg^2x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{sec^2x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}secx\,dx=$$

$$=\left(\ln(secx+tgx)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+1\right)-\ln(1+0)=\ln(\sqrt{2}+1)$$




حل عرضی: $S=\int_0^1 (\text{Arccos}\,y - y + 1)\,dy$

$=\left(y\,\text{Arccos}\,y - \sqrt{1-y^2} - \frac{y^2}{2} + y\right)\Big|_0^1$

$=\text{Arccos}(1) + \frac{3}{2}$

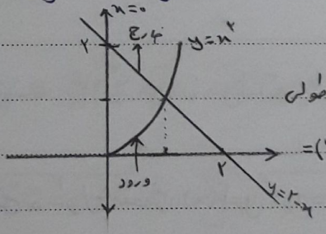
$\int \text{Arccos}\,y\,dy = y\,\text{Arccos}\,y + \int \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = y\,\text{Arccos}\,y - \sqrt{1-y^2}$

| علامت | $\frac{d}{dy}$ | $\int dy$ |
|---|---|---|
| + | $\text{Arccos}\,y$ | 1 |
| − | $\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$ | $y$ |

$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} \; \begin{bmatrix} u=1-y^2 \\ du=-2y\,dy \end{bmatrix} \; \int \frac{\frac{du}{-2}}{\sqrt{u}} = \frac{-1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}(2\sqrt{u}) = -\sqrt{1-y^2}$

مثال: مطلوبست محاسبه مساحت ناحیه ایجاد شده توسط $y=x^2$ و $y=2-x$ و $x=0$ در قسمت مثبت

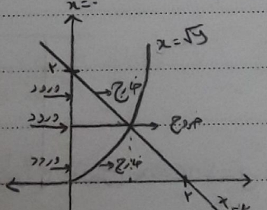
| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y=x^2$ | 0 | 1 | 4 |




محور x ها: حل طولی: $S=\int_0^1 (2-x-x^2)\,dx$

$=\left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{6}$

| $x$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $y=2-x$ | 2 | 0 |




حل عرضی: $S=S_1+S_2=\int_1^2 (2-y-0)\,dy + \int_0^1 (\sqrt{y}-0)\,dy$

$=\left(2y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{y^3}\right)\Big|_0^1$

$=\frac{7}{6}$

۲) حجم حاصل از دوران:

دوران محور x ها: $V=\pi\int_a^b \left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx \Leftarrow$ مانند حل طولی، حل می‌شود

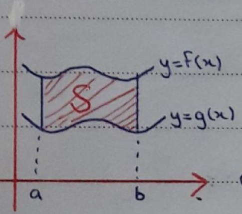
دوران محور y ها: $V=\pi\int_\alpha^\beta \left(f^2(y)-g^2(y)\right)dy \Leftarrow$ مانند حل عرضی، حل می‌شود

۴) $\lim \operatorname{Ln}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}+\operatorname{Ln}\sqrt[n]{1+\frac{2}{n}}+\dots+\operatorname{Ln}\sqrt[n]{1+\frac{n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\operatorname{Ln}(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}+\dots+\operatorname{Ln}(1+\frac{n}{n})^{\frac{1}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big(\underbrace{\operatorname{Ln}(1+\tfrac{1}{n})}_{F(x)=\operatorname{Ln}(1+x)}+\operatorname{Ln}(1+\tfrac{2}{n})+\dots+\operatorname{Ln}(1+\tfrac{n}{n})\Big)=\int_0^1 \operatorname{Ln}(1+x)\,dx=$$

$$=\big((x+1)\operatorname{Ln}(x+1)-(x+1)\big)\Big|_0^1=2\operatorname{Ln}2-1$$

۲) محاسبه مساحت منحنی: مساحت ناحیه ایجاد شده توسط $y=F(x)$ و $y=g(x)$ از $x=a$ تا $x=b$

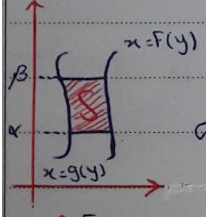



با فرض $g(x)\le F(x)$ از فرمول زیر بدست می‌آید:

بالایی - پایینی

حل طولی: $S=\int_a^b\big(F(x)-g(x)\big)dx$

مساحت ناحیه ایجاد شده توسط $x=F(y)$ , $x=g(y)$ از $y=\alpha$ تا $y=\beta$ با فرض $g(y)\le F(y)$ از فرمول زیر بدست می‌آید:




راست - چپ

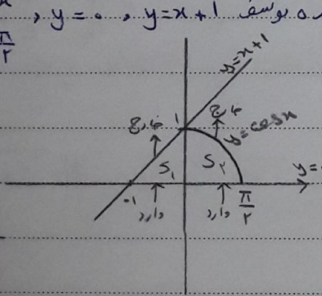
حل عرضی: $S=\int_\alpha^\beta\big(F(y)-g(y)\big)dy$

مثال: مطلوبست محاسبه مساحت ناحیه ایجاد شده توسط $y=x+1$ , $y=0$ , $\begin{cases}y=\cos x\\ 0\le x\le \frac{\pi}{2}\end{cases}$

ج)

| $x$ | $0$ | $-1$ |
|---|---|---|
| $y=x+1$ | $1$ | $0$ |

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|
| $y=\cos x$ | $1$ | $1$ |




حل طولی: $S=S_1+S_2$

$=\int_{-1}^{0}(x+1-0)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-0)\,dx$

$=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{0}+(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$

$=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

۳) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\,dt}{x^3} \underset{Hop}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{2x\sin\sqrt{x^2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin x}{3x} \underset{Hop}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{2\cos x}{3} = \frac{2}{3}$

## کاربرد انتگرال معین:

۱) محاسبه حد مجموع: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(F\left(\frac{1}{n}\right)+F\left(\frac{2}{n}\right)+\dots+F\left(\frac{n}{n}\right)\right)=\int_0^1 F(x)\,dx$

مثال:

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}_{f(x)=\sqrt{1+x}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\dots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx$ $\left[\begin{array}{l}1+x=t^2 \to x=t^2-1\\ dx=2t\,dt\end{array}\right]$ $\begin{array}{l}x=0\to t=1\\ x=1\to t=\sqrt{2}\end{array}$

$\int_1^{\sqrt{2}} t\times 2t\,dt = 2\int_1^{\sqrt{2}} t^2\,dt = \left(2\frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}$

2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n(1+\frac{1}{n})}+\frac{1}{n(1+\frac{2}{n})}+\dots+\frac{1}{n(1+\frac{n}{n})}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}_{F(x)=\frac{1}{1+x}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\dots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\int_0^1\frac{dx}{1+x}$ $\left[\begin{array}{l}u=1+x\\ du=dx\end{array}\right]$ $\begin{array}{l}x=0\to u=1\\ x=1\to u=2\end{array}$ $\int_1^2\frac{du}{u}=\ln u\Big|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2$

۳) $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\frac{1}{n}}+2e^{-\frac{2}{n}}+\dots+ne^{-\frac{n}{n}}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{e^{-\frac{1}{n}}+2e^{-\frac{2}{n}}+\dots+ne^{-\frac{n}{n}}}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{e^{-\frac{1}{n}}}{n}+\frac{2e^{-\frac{2}{n}}}{n}+\dots+\frac{ne^{-\frac{n}{n}}}{n}\right)=\int_0^1 xe^{-x}\,dx=\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)\Big|_0^1=\frac{-2}{e}+1$

$\frac{1}{n}\times e^{-\frac{1}{n}} \to f(x)=xe^{-x}$

| علامت | | |
|---|---|---|
| + | $\to x$ | $e^{-x}$ |
| − | $\to 1$ | $-e^{-x}$ |
| + | $0$ | $e^{-x}$ |

۵) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx = (x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2$

| علامت | $\frac{d}{dx}$ | $\int dx$ |
|---|---|---|
| + | $x^2$ | $\cos x$ |
| − | $2x$ | $\sin x$ |
| + | $2$ | $-\cos x$ |
| − | $0$ | $-\sin x$ |

۶) $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3+1}} \xrightarrow[\substack{x=0\to u=1\\ x=1\to u=2}]{\substack{u=x^3+1\\ du=3x^2dx}} \int_1^2 \frac{\frac{du}{3}}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3}2\sqrt{u}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$

۷) $\int_0^1 \sqrt{1-\sqrt{x}}\,dx \xrightarrow[\substack{x=0\to t=0\\ x=1\to t=1}]{x=t^2\to dx=2t\,dt} \int_0^1 \sqrt{1-t}\times 2t\,dt \xrightarrow[\substack{t=0\to u=1\\ t=1\to u=0}]{1-t=u^2\to dt=-2u\,du}$

$\int_1^0 u\times 2(1-u^2)(-2u)\,du = -4\int_1^0 (u^2-u^4)\,du = -4\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}\right)\Big|_1^0 = 4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}$

۸) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} \overset{\text{زوج}}{=} 2\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} \xrightarrow[\substack{x=0\to t=0\\ x=1\to t=\frac{\pi}{4}}]{x=tg\,t\to dx=(1+tg^2 t)\,dt} 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+tg^2 t)\,dt}{(1+tg^2 t)^2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

قضیه مشتق انتگرال معین: $v=v(x)\ ,\ u=u(x)$

$y=\int_u^v z(t)\,dt \Rightarrow y' = v'z(v) - u'z(u)$

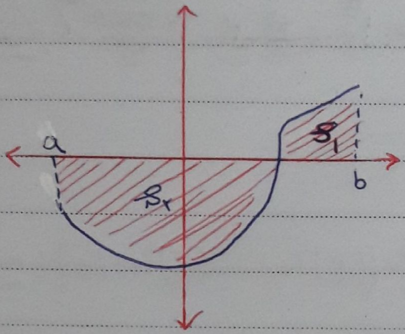
مثال: $y'$ توابع زیر را بیابید؟

۱) $y=\int_{\sin(2x)}^{x^3} \sqrt{1+t^2}\,dt \to y' = 3x^2\sqrt{1+(x^3)^2} - 2\cos 2x\sqrt{1+(\sin 2x)^2}$

۲) $y=\int_{x^2}^{5} \frac{dz}{\sqrt{1+z^3}} \to y' = 0 - 2x\times\frac{1}{\sqrt{1+(x^2)^3}} = -2x\times\frac{1}{\sqrt{1+x^6}}$

Year. Month. Date. ( ) Subject:

## انتگرال معین:




$\int_a^b F(x)dx = S_1 - S_2$

قضیه (نیوتن - لایب نیتز - معروف به قضیه حساب دیفرانسیل و انتگرال): فرض کنید $F(x)$ یک تابع پیوسته روی بازه $[a,b]$ باشد و $\int F(x)dx = F(x)+C$ در این صورت $\int_a^b F(x)dx = F(b)-F(a)$

خواص انتگرال معین:

1) $\int_a^a F(x)dx = 0$ 2) $\int_a^b F(x)dx = -\int_b^a F(x)dx$

3) $\int_a^b F(x)dx = \int_a^c F(x)dx + \int_c^b F(x)dx \ , \ a<c<b$

4) فرد $F(x) \Rightarrow \int_{-a}^{a} F(x)dx = 0$ 5) زوج $F(x) \Rightarrow \int_{-a}^{a} F(x)dx = 2\int_0^a F(x)dx$

مثال:

1) $\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ 2) $\int_0^\pi \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^\pi = 0$

3) $\int_0^2 |x-1|dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx = (x-\frac{x^2}{2})\Big|_0^1 + (\frac{x^2}{2}-x)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$

| | 0 | | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| - | \| | - | \| | + | \| | - |

4) $\int_0^2 |x^2-5x+4|dx = \int_0^1 (x^2-5x+4)dx - \int_1^2 (x^2-5x+4)dx = (\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x)\Big|_0^1$

$- (\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x)\Big|_1^2 = -5$

$x^2-5x+4=0 \rightarrow x=1,4$

| | 0 | | 1 | | 2 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + | \| | + | \| | - | \| | - | \| | + |

2000

2) $\int \frac{(x+2)\,dx}{(x+1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$

$\sqrt{-x^2+2x+3} = xt + \sqrt{3} \xrightarrow{(\,)^2} -x^2+2x+3 = x^2t^2 + 2\sqrt{3}\,xt + 3$

$\Rightarrow x^2(t^2+1) + 2x(\sqrt{3}t - 1) = 0 \rightarrow x = \frac{2-2\sqrt{3}t}{t^2+1} \rightarrow dx = \frac{-4\sqrt{3}t - 4t + 4\sqrt{3}t^2}{(t^2+1)^2}\,dt$

$$\int \frac{\left(\frac{2-2\sqrt{3}t}{t^2+1}+2\right)\left(\frac{-4t(\sqrt{3}+1)+4\sqrt{3}t^2}{(t^2+1)^2}\,dt\right)}{\left(\frac{2-2\sqrt{3}t}{t^2+1}+1\right)\left(\frac{2-2\sqrt{3}t}{(t^2+1)}\times t+\sqrt{3}\right)}$$

۱۳) انتگرال گیری از توابع به فرم $F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ (روش اویلر):

۱) $a>0$: از تغییر متغیر $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x + t$ استفاده می کنیم. علامت $\sqrt{a}$ دلخواه است.

۲) $c>0$: از تغییر متغیر $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$ استفاده می کنیم. علامت $\sqrt{c}$ دلخواه است.

۳) $ax^2+bx+c=0$ دارای ۲ ریشه $\alpha$ و $\beta$ باشد، در این صورت از تغییر متغیر $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$ استفاده می کنیم.

1) $\int\sqrt{2x-x^2}\,dx$

$$\left[\sqrt{2x-x^2} = xt \xrightarrow{(\ )^2} 2x-x^2 = x^2t^2 \to x^2(t^2+1)-2x=0 \to x=\frac{2}{t^2+1} \to dx = \frac{-2t\times 2}{(t^2+1)^2}dt\right]$$

$$2x-x^2=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\int\frac{2t}{t^2+1}\times\frac{-4t\,dt}{(t^2+1)^2}$$

$$=\int\frac{-8t^2dt}{(t^2+1)^3} = \int\frac{-8\,dt}{(t^2+1)^2} + \int\frac{8\,dt}{(t^2+1)^3} \xrightarrow{\left[\begin{array}{l} t=tg\,s \\ dt=(1+tg^2 s)ds \end{array}\right]} \int\frac{-8(1+tg^2s)ds}{(1+tg^2s)^2} + \int\frac{8(1+tg^2s)ds}{(1+tg^2s)^3}$$

$$=-8\int\cos^2 s\,ds + 8\int\cos^4 s\,ds = -8\int\frac{1+\cos2s}{2}ds + 8\int\left(\frac{1+\cos2s}{2}\right)^2ds = -4\int(1+\cos2s)ds$$

$$+2\int(1+\cos^2 2s+2\cos2s)ds = -4\left(s+\frac{1}{2}\sin2s\right)+2\left(s+2\left(\frac{1}{2}\sin2s\right)+\int\left(\frac{1+\cos4s}{2}\right)ds\right)$$

$$=-4s-2\sin2s+2s+2\sin2s+s+\frac{1}{4}\sin4s = -s+\frac{1}{4}\sin4s$$

$$=-Arctg\,t+\frac{1}{4}\sin4(Arctg\,t)$$

$$\frac{t^2}{(t^2+1)^3} = \frac{At+B}{(t^2+1)^3}+\frac{Ct+D}{(t^2+1)^2}+\frac{Et+F}{t^2+1} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=-1 \\ C=0 \\ D=1 \\ E=0 \\ F=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{t^2}{(t^2+1)^3} = \frac{-1}{(t^2+1)^3}+\frac{1}{(t^2+1)^2}$$

۳) $\int \frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{x}dx \xrightarrow[t=\text{Arcsec}(\frac{x}{a})]{x=a\sec t \Rightarrow dx=a\sec t\, tgt\, dt} = \int \frac{(a^2\sec^2 t-a^2)^{\frac{3}{2}} \times a\sec t\, tgt\, dt}{a\sec t}$

$= \int \frac{(a^2 tg^2 t)^{\frac{3}{2}}\, tgt\, dt}{1} = a^3\int tg^4 t\, dt = a^3\int (tg^4 t + tg^2 t - tg^2 t - 1 + 1)\,dt$

$= a^3\left(\int tg^2 t(1+tg^2 t)\,dt - \int (1+tg^2 t)\,dt + \int dt\right) \xrightarrow[du=(1+tg^2 t)dt]{u=tgt} = a^3\left(\int u^2 du - \int du + t\right)$

$= a^3\left(\frac{u^3}{3} - u + t\right) = a^3\left(\frac{tg^3 t}{3} - tgt + t\right) = a^3\left(\frac{tg^3(\text{Arcsec}(\frac{x}{a}))}{3} - tg(\text{Arcsec}(\frac{x}{a})) + \text{Arcsec}(\frac{x}{a})\right) + C$

۱۲) انتگرال گیری از توابع به شکل $F(\cos x , \sin x)$ (تابع کسری) یا نصف آنها: از تغییر متغیر $t = tg(\frac{x}{2})$ ،

در نتیجه $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ و $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ استفاده می کنیم.

مثال:

۱) $\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3+t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{3+t^2} \overset{\text{فرمول ۱۴}}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctg}\left(\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + C$

۲) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}dx \xrightarrow[t=\text{Arcsin}x]{x=1\sin t \Rightarrow dx=\cos t\, dt} = \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}\times \cos t\, dt}{1+\sin^2 t} = \int \frac{\cos^2 t\, dt}{1+\sin^2 t}$

$\xrightarrow{z=tg(\frac{t}{2})} = \int \frac{\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2 \times \frac{2dz}{1+z^2}}{1+\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^2} = 2\int \frac{(1-z^2)^2\, dz}{\underbrace{(z^4+4z^2+1)}_{\star}(1+z^2)} = 2\int \frac{(1-z^2)^2\, dz}{(z^2+3-\sqrt{8})(z^2+3+\sqrt{8})(1+z^2)}$

$\star)\ z^4+4z^2+1=0 \xrightarrow{z^2=w} w^2+4w+1=0 \xrightarrow{\Delta=32} w_{1,2} = \frac{-4\mp\sqrt{32}}{2} = -3\mp\sqrt{8} \Rightarrow \begin{cases} z^2=-3+\sqrt{8} \\ z^2=-3-\sqrt{8} \end{cases}$

۱۱) انتگرال گیری به روش تغییر مثلثاتی: اگر انتگرال دارای جملات $\sqrt{a^2-x^2}$ ، $\sqrt{x^2-a^2}$ ، $\sqrt{x^2+a^2}$ یا اینکه جمله $a^2+x^2$ در مخرج کسر باشد، از این روش برای حل انتگرال استفاده می کنیم:

۱) اگر انتگرال دارای جمله $\sqrt{a^2-x^2}$ باشد از تغییر متغیر $x=a\sin t$ استفاده می کنیم.

۲) اگر انتگرال دارای جمله $\sqrt{x^2+a^2}$ باشد یا اینکه $a^2+x^2$ در مخرج کسر باشد از $x=a\,tg\,t$ استفاده می کنیم.

۳) اگر انتگرال دارای جمله $\sqrt{x^2-a^2}$ باشد از $x=a\sec t$ استفاده می کنیم.

یادآوری: $\sec^2 t = 1+tg^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$

مثال:

$$1)\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx \xrightarrow[t=Arcsin(\frac{x}{2})]{x=2\sin t \to dx=2\cos t\,dt} = \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{2\sin t}\times 2\cos t\,dt$$

$$= \int \frac{2\cos^2 t}{\sin t}\,dt = 2\int \frac{(1-\sin^2 t)}{\sin t}\,dt = 2\int \left(\frac{1}{\sin t}-\sin t\right)dt = 2\left(-Ln(\csc t+\cot t)+\cos t\right)+C$$

$$= 2\left(-Ln\left(\csc(Arcsin(\tfrac{x}{2}))+\cot(Arcsin(\tfrac{x}{2}))\right)+\cos(Arcsin(\tfrac{x}{2}))\right)+C$$

$$2)\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}} \xrightarrow[t=Arctg(\frac{x}{3})]{x=3tg\,t \to dx=3(1+tg^2 t)\,dt} = \int \frac{3(1+tg^2 t)\,dt}{9tg^2 t\sqrt{9tg^2 t+9}} = \int \frac{3\times\frac{1}{\cos^2 t}\,dt}{9\times\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\times 3\times\frac{1}{\cos t}}$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt \xrightarrow{\substack{u=\sin t\\ du=\cos t\,dt}} = \frac{1}{9}\int \frac{du}{u^2} = \frac{-1}{9u} = \frac{-1}{9\sin t} = \frac{-1}{9\sin(Arctg(\frac{x}{3}))}$$

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \to k=4$

$$2)\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+1} \xrightarrow{\begin{bmatrix} x=t^4 \\ dx=4t^3dt \end{bmatrix}} = \int \frac{t^2}{t^3+1} \times 4t^3\,dt = 4\int \frac{t^5\,dt}{t^3+1} \overset{\star}{=} 4\left(\int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)dt\right)$$

$$=4\left(\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}Ln(t^3+1)\right) \xrightarrow{t=\sqrt[4]{x}} 4\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}}{3} - \frac{1}{3}Ln(\sqrt[4]{x^3}+1)\right)$$

$\star)$ $t^5 \div (t^3+1)$: quotient $t^2$; $-t^5 \pm t^2$; remainder $-t^2$

$$\Rightarrow t^5 = t^2(t^3+1) - t^2 \xrightarrow{\div (t^3+1)} \frac{t^5}{t^3+1} = t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}$$

$$\int \frac{t^2}{t^3+1}dt \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=t^3+1 \\ du=3t^2dt \end{bmatrix}} = \int \frac{\frac{du}{3}}{u} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}Ln u = \frac{1}{3}ln(t^3+1)$$

تعمیم روش ۱۰: اگر انتگرال دارای جملات $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}, \ldots\ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}$ باشد

برای حل انتگرال از تغییر متغیر $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ استفاده می‌کنیم که $k$ مخرج مشترک کسرهای $\frac{m}{n}, \ldots\ldots, \frac{p}{q}$ است.

مثال:

$$\begin{bmatrix} \frac{2+3x}{x-3} = t^2 \to 2+3x = xt^2 - 3t^2 \to x = \frac{3t^2+2}{t^2-3} \\ dx = \frac{6t(t^2-3) - 2t(3t^2+2)}{(t^2-3)^2}dt \to dx = \frac{-22t}{(t^2-3)^2}dt \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{2} \to k=2$

$$1)\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}\,dx = \int \left(\frac{2+3x}{x-3}\right)^{\frac{1}{2}}dx \longrightarrow$$

$$=\int t \times \frac{-22t}{(t^2-3)^2}dt \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=t \to du=dt \\ dv=\frac{-22t}{(t^2-3)^2} \overset{S}{\to} v=\frac{11}{t^2-3} \end{bmatrix}} = \frac{11t}{t^2-3} - \int \underbrace{\frac{11\,dt}{t^2-3}}_{x^2-a^2} = \frac{11t}{t^2-3} - 11 \times \frac{1}{2\sqrt{3}}Ln\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{t=\sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}} \frac{11\sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}}{\frac{2+3x}{x-3}-3} - 11 \times \frac{1}{2\sqrt{3}}Ln\frac{\sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}-\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}+\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{-22t\,dt}{(t^2-3)^2} = -22\int \frac{t\,dt}{(t^2-3)^2} \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=t^2-3 \\ du=2t\,dt \end{bmatrix}} -22\int \frac{\frac{du}{2}}{u^2} = -11\left(\frac{-1}{u}\right) = \frac{11}{t^2-3}$$

۲) $\frac{x^3-1}{x^2(x^2+x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^3}+\frac{Ex+F}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Gx+H}{(x^2+x+1)}+\frac{I}{x-2}$

مثال: $\int \frac{(2x+5)dx}{x^2(x-1)} = \int\left(\frac{-5}{x^2}+\frac{-7}{x}+\frac{7}{x-1}\right)dx = -5\frac{x^{-1}}{-1}-7\ln x+7\ln(x-1)$

$\frac{2x+5}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{x^2(B+C)+x(A-B)-A}{x^2(x-1)}$

چون مخرج ها با هم برابرند ← صورت ها نیز با هم برابراند

$$\begin{cases} B+C=0 \to C=7 \\ A-B=2 \to B=-7 \\ -A=5 \to A=-5 \end{cases}$$

نکته: اگر درجه صورت بزرگتر مساوی درجه مخرج بود تقسیم می کنیم:

مقسوم | مقسوم علیه / خارج قسمت — باقی مانده

⇒ مقسوم = مقسوم علیه × خارج قسمت + باقی مانده

⇒ $\frac{\text{مقسوم}}{\text{مقسوم علیه}}$ = خارج قسمت + $\frac{\text{باقی مانده}}{\text{مقسوم علیه}}$

۱۰) انتگرال گیری با تغییر متغیر $t^k$: اگر انتگرال دارای جملات $x^{\frac{m}{n}}$، $x^{\frac{r}{s}}$، ......، $x^{\frac{p}{q}}$ باشد، برای حل انتگرال از تغییر متغیر $x=t^k$ استفاده می کنیم، k مخرج مشترک کسرهای $\frac{m}{n}$، $\frac{r}{s}$، ...، $\frac{p}{q}$ است

مثال: $\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \to k=12$

$\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}dx \xrightarrow{\left[x=t^{12},\ dx=12t^{11}dt\right]} \int\frac{t^{18}-t^4}{t^3}\times 12t^{11}dt = 12\int(t^{26}-t^{12})dt$

$= 12\left(\frac{t^{27}}{27}-\frac{t^{13}}{13}\right) \xrightarrow{t=\sqrt[12]{x}} 12\left(\frac{\sqrt[12]{x^{27}}}{27}-\frac{\sqrt[12]{x^{13}}}{13}\right)$

۹) انتگرال گیری به روش تجزیه کسرها: برای به دست آوردن انتگرال $\frac{\text{چند جمله‌ای}}{\text{چند جمله‌ای}}$ که درجه صورت الزاماً از درجه مخرج کمتر است، ابتدا مخرج را به طور کامل تجزیه می‌کنیم تا به صورت حاصلضرب عوامل $(x-a)^m$ و $(x^2+ax+b)^m$ ($\Delta<0$) در بیاید. سپس برای هر یک از عوامل، کسرهای زیر را نسبت می‌دهیم:

الف) $(x-a)^m$ : $\frac{A}{(x-a)^m}+\frac{B}{(x-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{C}{(x-a)}$

ب) $(x^2+ax+b)^m$ ($\Delta<0$) : $\frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^m}+\frac{Cx+D}{(x^2+ax+b)^{m-1}}+\cdots+\frac{Ex+F}{x^2+ax+b}$

نکته: اگر $\Delta>0$ باشد، عبارت را تجزیه می‌کنیم.

تابع زیر علامت انتگرال را برابر مجموع کسرها قرار می‌دهیم و اعداد مجهول A، B، C، ...... را به دست می‌آوریم.

مثال: فقط تجزیه به کسرهای عبارات زیر را بنویسید؟

الف) $\frac{x}{x^2-1}=\frac{x}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+1)}$

($\Delta>0 \rightarrow$ تجزیه)

ب) $\frac{x}{(x^2-1)(x+1)}=\frac{x}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x-1)}$

($\Delta>0 \rightarrow$ تجزیه)

ج) $\frac{2x^2+5}{(x-1)^2x^3(x^2+1)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x^2}+\frac{E}{x}+\frac{Fx+G}{x^2+1}$

Year. Month. Date. ( ) Subject:

۸) انتگرال های بازگشتی: انتگرال هایی هستند که پس از ۲ بار جزء به جزء، انتگرال اولیه به دست می آید.

الف) $\begin{Bmatrix} e \\ \sinh \\ \cosh \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix}$ همه با کمان $(ax+b)$: هر کدوم رو که خواستیم از اون مشتق بگیریم

مثال: ۱) $\int e^{2x}\cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin(3x) + \frac{2}{9}e^{2x}\cos(3x) - \frac{4}{9}\int e^{2x}\cos(3x)\,dx$

| علامت | $\frac{d}{dx}=u$ | $\int dx$ |
|---|---|---|
| + | $e^{2x}$ | $\cos(3x)$ |
| − | $2e^{2x}$ | $\frac{1}{3}\sin(3x)$ |
| + | $4e^{2x}$ | $\frac{-1}{9}\cos(3x)$ |

$\Rightarrow \frac{13}{9}\int e^{2x}\cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin(3x) + \frac{2}{9}e^{2x}\cos(3x)$

$\xrightarrow{\div\frac{13}{9}} \int e^{2x}\cos(3x)\,dx = \frac{9}{13}\left(\frac{1}{3}e^{2x}\sin(3x) + \frac{2}{9}e^{2x}\cos(3x)\right)$

ب) انتگرال های $\int \sin Ln(ax+b)\,dx$ و $\int \cos Ln(ax+b)\,dx$: ۲ بار جدول می نویسیم و هر جدول را تا ۲ سطر ادامه می دهیم.

۲) $\int \cos(Lnx)\,dx = x\cos(Lnx) + \int \sin(Lnx)\,dx = x\cos(Lnx) + x\sin(Lnx) - \int \cos(Lnx)\,dx$

| علامت | $\frac{d}{dx}=u$ | $\int dx$ |
|---|---|---|
| + | $\cos(Lnx)$ | 1 |
| − | $\frac{-1}{x}\sin(Lnx)$ | $x$ |

| علامت | $\frac{d}{dx}=u$ | $\int dx$ |
|---|---|---|
| + | $\sin(Lnx)$ | 1 |
| − | $\frac{1}{x}\cos(Lnx)$ | $x$ |

$\Rightarrow 2\int \cos(Lnx)\,dx = x\cos(Lnx) + x\sin(Lnx) \xrightarrow{\div 2}$

$\int \cos(Lnx)\,dx = \frac{1}{2}\left(x\cos(Lnx) + x\sin(Lnx)\right)$

۴) $\int (3x^3-2x+1)\sin(2x)\,dx = -\frac{1}{2}(3x^3-2x+1)\cos(2x) + \frac{1}{4}(9x^2-2)\sin(2x) + \frac{18}{8}x\cos(2x) - \frac{18}{16}\sin 2x$

| علامت | $\frac{d}{dx}=u$ | $\int dx = dv$ |
|---|---|---|
| + | $3x^3-2x+1$ | $\sin 2x$ |
| − | $9x^2-2$ | $-\frac{1}{2}\cos(2x)$ |
| + | $18x$ | $-\frac{1}{4}\sin(2x)$ |
| − | $18$ | $\frac{1}{8}\cos(2x)$ |
| + | $0$ | $\frac{1}{16}\sin(2x)$ |

نکته: همواره جدول را تا جایی ادامه می‌دهیم که انتگرال حاصلضرب سطر آخر قابل محاسبه باشد.

۵) $\int \mathrm{Arctg}\,x\,dx = x\,\mathrm{Arctg}\,x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\,\mathrm{Arctg}\,x - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1+x^2)$

| علامت | $\frac{d}{dx}=u$ | $\int dx = dv$ |
|---|---|---|
| + | $\mathrm{Arctg}\,x$ | $1$ |
| − | * $\frac{1}{1+x^2}$ * | $x$ |

$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} \xrightarrow{[u=(1+x^2),\ du=2x\,dx]} = \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,u$

$= \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1+x^2)$

*) $---> = \int$(علامت)$\,u\,dv$

۶) $\int (4x^5-x+1)\mathrm{Ln}\,x\,dx = \left(\frac{2x^6}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\mathrm{Ln}\,x - \int\left(\frac{2x^5}{3}-\frac{x}{2}+1\right)dx$

| علامت | $\frac{d}{dx}=u$ | $\int dx = dv$ |
|---|---|---|
| + | $\mathrm{Ln}\,x$ | $4x^5-x+1$ |
| − | $\frac{1}{x}$ | $\frac{4x^6}{6}-\frac{x^2}{2}+x$ |

$= \left(\frac{2x^6}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\mathrm{Ln}\,x - \left(\frac{2}{3}\times\frac{x^6}{6} - \frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2} + x\right)$

$$1)\ \int (2x-1)\cos(5x)\,dx \xrightarrow[\;dv=\cos(5x)dx \xrightarrow{\int} v=\frac{1}{5}\sin(5x)\;]{\;u=2x-1 \xrightarrow{()'} du=2dx\;}$$

$$= \frac{1}{5}(2x-1)\sin(5x) - \int \frac{2}{5}\sin(5x)\,dx = \frac{1}{5}(2x-1)\sin(5x) - \frac{2}{5}\times\frac{-1}{5}\cos(5x)$$

$$\int \sin 5x\,dx = -\frac{1}{5}\cos(5x)$$

$$2)\ \int x^5 \ln x\,dx \xrightarrow[\;dv=x^5dx \xrightarrow{\int} v=\frac{x^6}{6}\;]{\;u=\ln x \xrightarrow{()'} du=\frac{1}{x}dx\;} = \frac{x^6}{6}\ln x - \int \frac{x^6}{6}\times\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{1}{6}\times\frac{x^6}{6}$$

$$\int \frac{x^5}{6}\,dx = \frac{1}{6}\int x^5\,dx = \frac{1}{6}\times\frac{x^6}{6}$$

$$3)\ \int x^2 e^{3x}\,dx \xrightarrow[\;dv=e^{3x}dx \xrightarrow{\int} v=\frac{1}{3}e^{3x}\;]{\;u=x^2 \xrightarrow{()'} du=2x\,dx\;} = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \int \frac{2}{3}x e^{3x}\,dx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right)$$

$$\int x e^{3x}\,dx \xrightarrow[\;dv=e^{3x}dx \xrightarrow{\int} v=\frac{1}{3}e^{3x}\;]{\;u=x \xrightarrow{()'} du=dx\;} = \frac{1}{3}xe^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}e^{3x}$$

نکته: اگر $x^n$ بود باید $n$ بار به روش جزء به جزء انتگرال بگیریم.

حل مثال ۳ به روش نردبانی:

| علامت | $\frac{d}{dx}=u$ | $\int dx = dv$ |
|---|---|---|
| | | $e^{3x}$ |
| + | $x^2$ | $\frac{1}{3}e^{3x}$ |
| − | $2x$ | $\frac{1}{9}e^{3x}$ |
| + | $2$ | $\frac{1}{27}e^{3x}$ |
| − | $0$ | |

$$\Rightarrow \int x^2 e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x}$$

۲) $\int \frac{(2x+5)\,dx}{\sqrt{2x^2-5x+4}} = \int \frac{\frac{1}{2}(4x-5)}{\sqrt{2x^2-5x+4}}\,dx + \int \frac{(5+\frac{5}{2})\,dx}{\sqrt{2x^2-5x+4}} = \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{(4x-5)\,dx}{\sqrt{2x^2-5x+4}}}_{I} + (5+\frac{5}{2})\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-5x+4}}}_{II}$

I) $\int \frac{(4x-5)\,dx}{\sqrt{2x^2-5x+4}} \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=2x^2-5x+4 \\ du=(4x-5)dx \end{bmatrix}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{u} = 2\sqrt{2x^2-5x+4}$

II) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-5x+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2\left[(x-\frac{5}{4})^2+(\frac{\sqrt{7}}{4})^2\right]}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{5}{4})^2+(\frac{\sqrt{7}}{4})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} Ln\left(x-\frac{5}{4}+\sqrt{(x-\frac{5}{4})^2+(\frac{\sqrt{7}}{4})^2}\right)$

طبق مربع کامل: $2x^2-5x+4 = 2(x^2-\frac{5}{2}x+2) = 2\left[(x-\frac{5}{4})^2+\frac{7}{16}\right]$

جایگذاری: $= \frac{1}{4}\times 2\sqrt{2x^2-5x+4} + \frac{\sqrt{2}}{2} Ln\left(x-\frac{5}{4}+\sqrt{(x-\frac{5}{4})^2+(\frac{\sqrt{7}}{4})^2}\right)$

۱۷) انتگرال گیری به روش جزء به جزء: اگر ۲ تابع در هم ضرب شوند و انتگرال آن به روش تغییر متغیر حل نشود از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم که فرمول آن به صورت زیر است:

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

نکته: در این روش تقدم انتخاب u به صورت زیر می‌باشد:

۱) تابع Ln و توابع معکوس مثلثاتی مثل Arcsin و Arctg و .......

۲) توابع چند جمله‌ای

۳) توابع نمایی و مثلثاتی مانند Sin و Cos و .......

۳) $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+2x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} \overset{\text{فرمول ۳}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ArcSin} \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$

مربع کامل: $-2x^2+2x+1 = -2\left[x^2-x-\frac{1}{2}\right] = -2\left[\left(x+\frac{2}{2(-2)}\right)^2-\frac{4}{16}+\frac{1}{-2}\right] = -2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right]$

$= 2\left[\frac{3}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]$

۱۱۶) انتگرال های به فرم $\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$ یا $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ :

$\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx + \int \frac{B-\frac{Ab}{2a}}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\underbrace{\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx}_{\text{تغییر متغیر} \Rightarrow \ Ln(ax^2+bx+c)} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\underbrace{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{\text{مربع کامل}}$

مثال: 1) $\int \frac{(4x+3)}{3x^2-2x-1}dx = \int \frac{\frac{4}{6}(6x-2)}{3x^2-2x-1}dx + \int \frac{3-\frac{-8}{6}}{3x^2-2x-1}dx = \frac{4}{6}\underbrace{\int \frac{(6x-2)}{3x^2-2x-1}dx}_{I} + \frac{26}{6}\underbrace{\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}}_{II}$

I) $\int \frac{(6x-2)dx}{3x^2-2x-1} \xrightarrow[\ du=(6x-2)dx\ ]{u=3x^2-2x-1} = \int \frac{du}{u} = Ln u = Ln(3x^2-2x-1)$

II) $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1} = \int \frac{dx}{3\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2} \overset{\text{فرمول ۱۵}}{=} \frac{1}{3} \times \frac{1}{2\left(\frac{2}{3}\right)} Ln\left(\frac{x-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{x-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}\right)$

مربع کامل: $3x^2-2x-1 = 3\left(x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right) = 3\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\right] = 3\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} = \frac{4}{6}Ln(3x^2-2x-1) + \frac{26}{6} \times \frac{1}{4} Ln\left(\frac{x-1}{x-\frac{1}{3}}\right)$

۲) $\int \cot^8 x\,dx = \int(\cot^8 x + \cot^6 x - \cot^6 x - \cot^4 x + \cot^4 x + \cot^2 x - \cot^2 x - 1 + 1)\,dx$

$= \int \cot^6 x(1+\cot^2 x)\,dx - \int \cot^4 x(1+\cot^2 x)\,dx + \int \cot^2 x(1+\cot^2 x)\,dx - \int(1+\cot^2 x)\,dx + \int dx$

$\begin{bmatrix} u = \cot x \\ du = -(1+\cot^2 x)\,dx \end{bmatrix} \Rightarrow = -\int u^6\,du + \int u^4\,du - \int u^2\,du + \int du + \int dx = -\frac{u^7}{7} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + u + x + c$

$= -\frac{\cot^7 x}{7} + \frac{\cot^5 x}{5} - \frac{\cot^3 x}{3} + \cot x + x + c$

۵) انتگرال گیری از: $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ یا $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ : $ax^2+bx+c$ را مربع کامل می کنیم و سپس

از فرمول های ۱۲ تا ۱۵ انتگرال گیری استفاده می کنیم.

یادآوری مربع کامل: $ax^2+bx+c \xrightarrow{\text{مربع کامل}} = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$

مثال: ۱) $\int \frac{dx}{2x^2+3x-1} = \int \frac{dx}{2\left[(x+\frac{3}{4})^2 - (\frac{\sqrt{17}}{4})^2\right]} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{3}{4})^2 - (\frac{\sqrt{17}}{4})^2} \overset{\text{فرمول ۱۵}}{=} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\frac{\sqrt{17}}{4}} \times Ln\,\frac{x+\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}}{x+\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}} + c$

مربع کامل: $2x^2+3x-1 = 2\left[x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right] = 2\left[(x+\frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16} - \frac{1}{2}\right] = 2\left[(x+\frac{3}{4})^2 - \frac{17}{16}\right]$

۲) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3\left[(x-\frac{1}{6})^2 + (\frac{\sqrt{59}}{6})^2\right]}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{6})^2 + (\frac{\sqrt{59}}{6})^2}} \overset{\text{فرمول ۱۳}}{=} \frac{1}{\sqrt{3}} Ln\left((x-\frac{1}{6}) + \sqrt{(x-\frac{1}{6})^2 + (\frac{\sqrt{59}}{6})^2}\right) + c$

مربع کامل: $3x^2-x+5 = 3\left[x^2 - \frac{x}{3} + \frac{5}{3}\right] = 3\left[(x+\frac{-1}{6})^2 - \frac{1}{36} + \frac{5}{3}\right] = 3\left[(x-\frac{1}{6})^2 + \frac{59}{36}\right]$

یادآوری فرمول ها ۱۲ تا ۱۵ انتگرال گیری:

۱۲) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = ArcSin(\frac{x}{a}) + c$ ۱۵) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} Ln(\frac{x-a}{x+a}) + c$

2000 ۱۳) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = Ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + c$ ۱۴) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} Arctg(\frac{x}{a}) + c$

۳) انتگرال گیری از توابع های زوج sin و cos : از روابط $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ و $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ استفاده می کنیم.

مثال:

۱) $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$

۲) $\int \sin^4 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{(1-\cos 2x)^2}{4}\,dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2\,dx$

$= \frac{1}{4}\int (1+\cos^2 2x - 2\cos 2x)\,dx = \frac{1}{4}\int \left(1+\frac{1+\cos 4x}{2} - 2\cos 2x\right) dx$

$= \frac{1}{4}\int \left(1+\frac{1}{2}+\frac{\cos 4x}{2} - 2\cos 2x\right) dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\sin 4x - 2\times\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$

۴) انتگرال گیری از توابع توان های tg و cot : برای انتگرال گیری از $tg^n x$ جملات $tg^{n-2}x$ ، $tg^{n-4}x$ ، ... تا [ $tgx$ اگر n فرد باشد و $1$ اگر n زوج باشد ] را به صورت: اضافه می کنیم ← کم می کنیم ← کم می کنیم ← اضافه می کنیم

اضافه و کم می کنیم. سپس انتگرال های حاصل را به کمک تغییر متغیر حل می کنیم.

مثال:

۱) $\int tg^7 x\,dx = \int (tg^7 x + tg^5 x - tg^5 x - tg^3 x + tg^3 x + tgx - tgx)\,dx$

$= \int tg^5 x(1+tg^2 x)\,dx - \int tg^3 x(1+tg^2 x)\,dx + \int tgx(1+tg^2 x)\,dx - \int tgx\,dx \xrightarrow{\ u = tgx,\ du = (1+tg^2 x)dx\ }$

$= \int u^5\,du - \int u^3\,du + \int u\,du - \int tgx\,dx = \frac{u^6}{6} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2} - \ln\cos x + C = \frac{tg^6 x}{6} - \frac{tg^4 x}{4} + \frac{tg^2 x}{2} - \ln\cos x$

۵) $\int \frac{x\,dx}{x^2+5} \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=x^2+5 \\ du=2x\,dx \end{bmatrix}} = \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\int u^{-1}\,du = \frac{1}{2}\ln(x^2+5)+c$

۶) $\int (2x^3+7)^4 x^2\,dx \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=2x^3+7 \\ du=6x^2\,dx \end{bmatrix}} = \int u^4 \times \frac{du}{6} = \frac{1}{6}\int u^4\,du = \frac{1}{6}\times\frac{u^5}{5} = \frac{1}{30}(2x^3+7)^5+c$

۷) $\int \frac{\sin(3x)\,dx}{(2+5\cos(3x))^4} \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=2+5\cos(3x) \\ du=-15\sin(3x)\,dx \end{bmatrix}} = \int \frac{\frac{du}{-15}}{u^4} = \int \frac{du}{-15u^4} = \frac{1}{-15}\int \frac{du}{u^4} = \frac{-1}{15}\int u^{-4}\,du$

$= \frac{+1}{15} \times \frac{u^{-3}}{+3} = \frac{1}{45u^3} = \frac{1}{45(2+5\cos(3x))^3}$

۸) $\int \frac{dx}{3e^x+1} \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \int \frac{e^{-x}\,dx}{3+e^{-x}} \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=3+e^{-x} \\ du=-e^{-x}\,dx \end{bmatrix}} = \int \frac{-du}{u} = -\ln u + c = -\ln(3+e^{-x})+c$

۱۲) انتگرال گیری از توابع های فرد sin و cos: توان ۱ sinx یا cos را جدا می کنیم و جمله باقیمانده را از رابطه $\sin^2x+\cos^2x=1$ جایگذاری می کنیم. سپس به روش تغییر متغیر انتگرال را حل می کنیم.

مثال:

۱) $\int \cos^3x\,dx = \int \cos^2x\cos x\,dx = \int (1-\sin^2x)\cos x\,dx \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=\sin x \\ du=\cos x\,dx \end{bmatrix}}$

$= \int (1-u^2)\,du = u - \frac{u^3}{3} + c = \sin x - \frac{\sin^3x}{3} + c$

۲) $\int \sin^5x\,dx = \int \sin^4x\sin x\,dx = \int (1-\cos^2x)^2\sin x\,dx \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=\cos x \\ du=-\sin x\,dx \end{bmatrix}}$

$= -\int (1-u^2)^2\,du = -\int (1+u^4-2u^2)\,du = -\left(u+\frac{u^5}{5}-2\frac{u^3}{3}\right)+c = -\left(\cos x+\frac{\cos^5x}{5}-2\frac{\cos^3x}{3}\right)+c$

مثال ۲: $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{5}}dx = \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}}+C$ , $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}+C$

مثال ۲: $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \int x^{-\frac{1}{4}}dx = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}+C$ , $\int x^{-4}dx = \frac{x^{-3}}{-3}+C$

مثال ۱۲: $\int (1+tg^2(4x))dx = \frac{1}{4}tg(4x)+C$ , $\int \cos(3x) = \frac{1}{3}\sin(3x)$

## روش های انتگرال گیری:

۱) روش تغییر متغیر: چنانچه در انتگرال ، جمله ای را u بگیریم و du نیز در زیر علامت انتگرال وجود داشته باشد از این روش برای حل انتگرال استفاده می کنیم.

یادآوری: $y=F(x) \Rightarrow dy=F'(x)dx$

مثال:

1) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx \xrightarrow[du=\cos x\,dx]{u=\sin x} \int e^u du = e^u + C = e^{\sin x}+C$

2) $\int \frac{(1+tg^2x)dx}{\sqrt[3]{tg^2x}} \xrightarrow[du=(1+tg^2x)dx]{u=tgx} \int \frac{du}{\sqrt[3]{u^2}} = \int u^{-\frac{2}{3}}du = \frac{u^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+C = 3\sqrt[3]{u}+C = 3\sqrt[3]{tgx}+C$

نکته: اگر جمله ای که می خواهیم u بگیریم ، با عددی جمع یا تفریق شده باشد ، بهتر است آن را نیز جزء u بگیریم.

3) $\int \frac{\cos x\,dx}{(\sin x+5)^2} \xrightarrow[du=\cos x\,dx]{u=\sin x+5} \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-1}+C = \frac{-1}{u}+C = \frac{-1}{\sin x+5}+C$

4) $\int \sqrt{tgx-7}\,(1+tg^2x)dx \xrightarrow[du=(1+tg^2x)dx]{u=tgx-7} \int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{3}\sqrt{(tgx-7)^3}+C$

فرمول های انتگرال گیری:

۱) $\int dx = x + C$

۲) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

۳) $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = Ln x + C$

۴) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

۵) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

۶) $\int (1+tg^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x \, dx = tg x + C$

۷) $\int (1+\cot^2 x) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

۸) $\int tg x \, dx = -Ln \cos x + C = Ln \sec x + C$

۹) $\int \cot x \, dx = Ln \sin x + C$

۱۰) $\int \sec x \, dx = Ln(\sec x + tg x) + C$

۱۱) $\int \csc x \, dx = -Ln(\csc x + \cot x) + C$

۱۲) $\int F'(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$

۱۲) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = Arc \sin\left(\frac{x}{a}\right) + C$

۱۳) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = Ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C$

۱۴) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} Arc tg\left(\frac{x}{a}\right) + C$

۱۵) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} Ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C$

۱۷) $\int e^x dx = e^x + C$

۱۸) $\int a^x dx = \frac{a^x}{Ln a} + C$

۱۹) $\int \sinh x = \cosh x + C$

۲۰) $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$

۲۱) $\int (1 - tgh^2 x) dx = tgh x + C$

۲۲) $\int (1 - \coth^2 x) dx = \coth x + C$

مثال: سری تیلور $\ln x$ و $f(x)=(x-1)\ln x$ را در نقطه $x=1$ به دست آورید.

حل: سری تیلور $g(x)=\ln x$ در $x=1$:

$g(x)=\ln x \longrightarrow g(1)=\ln 1=0$

$g'(x)=\frac{1}{x} \longrightarrow g'(1)=1$

$g''(x)=\frac{-1}{x^2} \longrightarrow g''(1)=-1$

$g'''(x)=\frac{2}{x^3} \longrightarrow g'''(1)=2$

سری تیلور: $0+1(x-1)+\frac{-1}{2!}($

سری ماکلورن: به سری تیلور تابع $f(x)$ در $x=0$ گوییم.

تذکر: چنانچه سری ماکلورن تابع $f(x)\times x^n\times$ عدد خواسته شود، سری ماکلورن $f(x)$ را به دست می‌آوریم و آن را در $x^n\times$ عدد ضرب می‌کنیم.

مثال: سری ماکلورن $f(x)=2x^3e^{-4x}$ را به دست آورید.

حل: سری ماکلورن $g(x)=e^{-4x}$:

$g(x)=e^{-4x} \longrightarrow g(0)=1$

$g'(x)=-4e^{-4x} \longrightarrow g'(0)=-4$

$g''(x)=16e^{-4x} \longrightarrow g''(0)=16$

$g'''(x)=-64e^{-4x} \longrightarrow g'''(0)=-64$

سری ماکلورن $g(x)$: $1+(-4)(x-0)+\frac{16}{2!}(x-0)^2+\frac{(-64)}{3!}(x-0)^3+\cdots$

$\xrightarrow{\times 2x^3}$ سری ماکلورن $f(x)$: $2x^3+(-8)x^4+16x^5+\frac{-64}{3}x^6+\cdots$

انتگرال نامعین: $F'(x)=f(x) \Rightarrow \int f(x)\,dx=F(x)+C$

مثال: 1) $\int \cos x\,dx=\sin x+c$  2) $\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}+c$

**مثال:** سری تیلور تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در نقطه $x=1$ بنویسید؟

$f(x)=\frac{1}{x} \rightarrow f(1)=1$

$f'(x)=\frac{-1}{x^2} \rightarrow f'(1)=-1$

$f''(x)=\frac{2}{x^3} \rightarrow f''(1)=2$

$f'''(x)=\frac{-6}{x^4} \rightarrow f'''(1)=-6$

$$\Rightarrow f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots$$

$$1+(-1)(x-1)+\frac{2}{2!}(x-1)^2+\frac{-6}{3!}(x-a)^3+\cdots$$

**مثال:** سری تیلور تابع $f(x)=Ln(x+1)$ را در نقطه $x=2$ بیابید؟

$f(x)=Ln(x+1) \rightarrow f(2)=Ln3$

$f'(x)=\frac{1}{x+1} \rightarrow f'(2)=\frac{1}{3}$

$f''(x)=\frac{-1}{(x+1)^2} \rightarrow f''(2)=\frac{-1}{9}$

$f'''(x)=\frac{2}{(x+1)^3} \rightarrow f'''(2)=\frac{2}{27}$

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots$$

$$Ln3+\frac{1}{3}(x-2)+\frac{-\frac{1}{9}}{2!}(x-2)^2+\frac{\frac{2}{27}}{3!}(x-2)^3+\cdots$$

**تمرین:** سری تیلور $f(x)=10^x$ را در نقطه $x=1$ بنویسید؟

$f(x)=10^x \rightarrow f(1)=10$

$f'(x)=10^x Ln10 \rightarrow f'(1)=10Ln10$

$f''(x)=10^x(Ln10)^2 \rightarrow f''(1)=10(Ln10)^2$

$f'''(x)=10^x(Ln10)^3 \rightarrow f'''(1)=10(Ln10)^3$

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots$$

$$10+10Ln10(x-1)+\frac{10(Ln10)^2}{2!}(x-1)^2+\frac{10(Ln10)^3}{3!}(x-1)^3+\cdots$$

**تمرین:** سری تیلور $f(x)=e^{5x}$ را در نقطه $x=0$ بنویسید؟

$f(x)=e^{5x} \rightarrow f(0)=e^0=1$

$f'(x)=5e^{5x} \rightarrow f'(0)=5(e^0)=5$

$f''(x)=25e^{5x} \rightarrow f''(0)=25(e^0)=25$

$f'''(x)=125e^{5x} \rightarrow f'''(0)=125(e^0)=125$

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots$$

$$1+5(x-0)+\frac{25}{2!}(x-0)^2+\frac{125}{3!}(x-0)^3+\cdots$$

**تذکر:** چنانچه سری تیلور تابع $f(x)(x-a)^n$، عدد در نقطه $x=a$ خواسته شود ابتدا سری تیلور $f(x)$ را بدست می‌آوریم و آن را در $(x-a)^n$ عدد ضرب می‌کنیم.

۲) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} \overset{(\infty^0)}{=\!=} e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

حل: $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln\frac{1}{x} \overset{(0\times\infty)}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{\underset{HOP}{=\!=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}$

$\overset{(\frac{0}{0})}{\underset{HOP}{=\!=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x - x\sin x} = \frac{0}{1-0} = 0$

$\lim\limits_{x\to a}F(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)(F(x)-1)}$ رفع ابهام از صورت مبهم $1^\infty$:

۱) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{x}} \overset{(1^\infty)}{=\!=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(x+e^{2x}-1)} = e^3$

حل: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(x+e^{2x}-1) \overset{(\infty\times 0)}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{x+e^{2x}-1}{x} \overset{(\frac{0}{0})}{\underset{HOP}{=\!=}} \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2e^{2x}}{1} = 3$

۲) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} \overset{(1^\infty)}{=\!=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}-1\right)} = e^0 = 1$

حل: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\left(\frac{1+tgx-1-\sin x}{1+\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\left(\frac{tgx-\sin x}{1+\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{\sin x+\sin^2 x} \overset{(\frac{0}{0})}{\underset{HOP}{=\!=}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+tg^2x-\cos x}{\cos x+2\sin x\cos x} = \frac{0}{1+0} = 0$

سری تیلور: سری تیلور تابع $F(x)$ را در نقطه $x=a$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{F''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{F'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$ تا ۴ جمله در امتحان کافیست

۳) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{Hop}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2\sqrt{x}}{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

تذکر: همه حالات $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ را نمی‌توان با هوپیتال حل کرد.

۴) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x+4^x}{3^{x+1}+4^{x+1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{Hop}{=}} \lim \frac{3^x\ln 3+4^x\ln 4}{3\times 3^x\ln 3+4\times 4^x\ln 4}$ ⇐ هوپیتال را هر چند بار هم بزنیم جواب نمی‌دهد

* چون $3<4$ ⇐ عدد را به توان بی‌نهایت برسانیم صفر می‌شود

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3^x+4^x}{4^x}}{\frac{3\times3^x+4\times4^x}{4^x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\frac{3}{4})^x+1}{3(\frac{3}{4})^x+4} = \frac{1}{4}$ ($(\frac{3}{4})^x \to 0$ *)

رفع ابهام از $\infty\times0$: با نوشتن $Fg = \frac{F}{\frac{1}{g}}$ یا $Fg = \frac{g}{\frac{1}{F}}$، آن را به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل می‌کنیم

۱) $\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} \overset{(\infty\times0)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{\underset{Hop}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{\underset{Hop}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

۲) $\lim_{x\to0^+} x\ln x \overset{(0\times-\infty)}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\overset{**}{\ln x}}{\frac{1}{x}} \overset{(\frac{-\infty}{\infty})}{\underset{Hop}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} -x = 0$

۳) $\lim_{x\to0^+} \sin x\ln x \overset{(0\times-\infty)}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\overset{**}{\ln x}}{\frac{1}{\sin x}} \overset{(\frac{-\infty}{\infty})}{\underset{Hop}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{-\sin^2 x}{x\cos x}$

$\overset{(\frac{0}{0})}{\underset{Hop}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{-2\sin x\cos x}{\cos x - x\sin x} = \frac{0}{1-0} = 0$

** در رفع ابهام $\infty\times0$ اگر در صورت سوال $\ln x$ داشتیم حتماً باید $\ln x$ را نگه داشته و دیگری را با معکوس به مخرج می‌فرستیم

رفع ابهام از صورت مبهم $\infty^0$ و $0^0$

$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \overset{0^0 \text{ یا } \infty^0}{=} e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$

۱) $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} \overset{(\infty^0)}{=} e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\times\ln x} = e^0 = 1$

اما: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\times\ln x \overset{(0\times\infty)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{Hop}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Year. Month. Date. ( ) Subject:

مثال:

1) $\mathrm{Arctg}\,x < x \quad , x > 0 \Rightarrow F(x) = x - \mathrm{Arctg}\,x \Rightarrow F'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} > 0$

$\xrightarrow[\text{صعودی } F(x)]{F(0)=0} F(x) > F(0) \Rightarrow x - \mathrm{Arctg}\,x > 0 \Rightarrow \mathrm{Arctg}\,x < x$

2) $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2} \quad , x > 0 \Rightarrow F(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \Rightarrow F'(x) = -\sin x + \frac{2 \times x \times 2}{4} = x - \sin x > 0$ (*)

(*)

$g(x) = x - \sin x$

$g'(x) = 1 - \cos x > 0$

$g(0) = 0$

$\xrightarrow{\text{صعودی } g(x)} g(x) > g(0) \to x - \sin x > 0$

$\xrightarrow{\text{صعودی } F(x)} F(x) \geqslant F(0) \Rightarrow \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geqslant 0 \to \cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$

صورت های مبهم: $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $0 \times \infty$ ، $1^\infty$ ، $0^0$ ، $\infty^0$

نکته: $\ln \infty = \infty \quad , \ln 0^+ = -\infty$

قاعده هوپیتال:

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x)}{g(x)} \xrightarrow[HOP]{(\frac{\infty}{\infty} \text{ یا } \frac{0}{0})} \lim_{x\to a} \frac{F'(x)}{g'(x)}$$

رفع ابهام از $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$: یک یا چند بار از هوپیتال استفاده می کنیم.

مثال:

1) $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{\ln(x+3)} \xrightarrow[HOP]{(\frac{0}{0})} \lim_{x\to -2} \frac{1}{\frac{1}{x+3}} = \lim_{x\to -2} x+3 = 1$

2) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3^x}{x^2+x-1} \xrightarrow[HOP]{(\frac{\infty}{\infty})} \lim_{x\to +\infty} \frac{3^x \ln 3}{2x+1} \xrightarrow[HOP]{(\frac{\infty}{\infty})} \lim_{x\to +\infty} \frac{3^x (\ln 3)^2}{2} = +\infty$

2000

## نتایج قضیه مقدار میانگین:

1) فرض کنید برای هر $x$ داشته باشیم: $f'(x)=0$. در این صورت $f(x)$ تابعی ثابت است.

اثبات: دو نقطه دلخواه $x_2 > x_1$: قضیه مقدار میانگین: $f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0$

$\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

مثال: نشان دهید:

1) $\mathrm{Arc}\sin x + \mathrm{Arc}\cos x = \frac{\pi}{2}$

قرار دهید: $f(x) = \mathrm{Arc}\sin x + \mathrm{Arc}\cos x$ واضح است $\Leftarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ بنابراین $f(x)$

تابعی ثابت است و $f(0)=\frac{\pi}{2}$ بنابراین $f(x)=\frac{\pi}{2}$.

2) $\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\,x + \mathrm{Arc}\cot x = \frac{\pi}{2}$

قرار دهید: $f(x) = \mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\,x + \mathrm{Arc}\cot x$ واضح است $\Leftarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2} = 0$ بنابراین $f(x)$

تابعی ثابت است و $f(0)=\frac{\pi}{2}$ بنابراین $f(x)=\frac{\pi}{2}$.

2) فرض کنید $f(x)$ یک تابع پیوسته روی $[a,b]$ و مشتق پذیر روی $(a,b)$ باشد. در این صورت اگر

$f'(x)>0$ باشد آنگاه $f(x)$ صعودی و اگر $f'(x)<0$ باشد آنگاه $f(x)$ نزولی است.

2) $|\sin x - \sin y| \leq |x-y| \ , \ 0<y<x \Rightarrow f(x)=\sin x \ , \ [y,x]$

$f'(x)=\cos x$

قضیه مقدار میانگین: $\cos c = \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y} \xrightarrow{-1\leq \cos c \leq 1} -1 \leq \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y} \leq 1$

$\Rightarrow \left|\dfrac{\sin x - \sin y}{x-y}\right| \leq 1 \xrightarrow{\times |x-y|} |\sin x - \sin y| \leq |x-y|$

3) $(y-x)\,tg\,x < Ln\left(\dfrac{\cos x}{\cos y}\right) < (y-x)\,tg\,y \ , \ \dfrac{\pi}{2} > x > y > 0 \Rightarrow f(x) = Ln \cos x \ , \ [y,x]$

$f'(x) = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -tg\,x$

قضیه مقدار میانگین: $-tg\,c = \dfrac{Ln \cos x - Ln \cos y}{x-y}$

$c \in (y,x) \Rightarrow y<c<x \longrightarrow -tg\,x < -tg\,c < -tg\,y$

$\Rightarrow -tg\,x < \dfrac{Ln\cos x - Ln \cos y}{x-y} < -tg\,y \xrightarrow{\times(x-y)} -(x-y)\,tg\,x < Ln\left(\dfrac{\cos x}{\cos y}\right) < -(x-y)\,tg\,y$

$\Rightarrow (y-x)\,tg\,x < Ln\left(\dfrac{\cos x}{\cos y}\right) < (y-x)\,tg\,y$

★ 4) $1+2Ln\,x \leq x^2 \ , \ x>0 \Rightarrow f(x) = Ln\,x \ , \ [1,x^2] \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

قضیه مقدار میانگین: $\dfrac{1}{c} = \dfrac{Ln\,x^2 - Ln\,1}{x^2-1}$ (*)

$c\in(1,x^2) \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{c} < 1 \xrightarrow{(*)} \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{Ln\,x^2}{x^2-1} < 1 \longrightarrow \dfrac{Ln\,x^2}{x^2-1} < 1 \longrightarrow 1 + Ln\,x^2 < x^2$

$\Rightarrow 1+2Ln\,x < x^2$

۷) $e^x > 1+x \ , \ x \neq 0$

حالت اول: $f(x)=e^x \ , \ \overset{x>0}{(0,x)} \Rightarrow f'(x)=e^x$

تعمیم مقدار میانگین: $e^c = \dfrac{e^x - e^0}{x-0}$

$c\in(0,x) \to 0<c<x \xrightarrow{e^x \text{ صعودی}} e^0<e^c<e^x \Rightarrow \dfrac{e^x-1}{x}>1 \Rightarrow e^x > x+1$

حالت دوم: $f(x)=e^x \ , \ \overset{x<0}{(x,0)} \Rightarrow f'(x)=e^x$

تعمیم مقدار میانگین: $e^c = \dfrac{e^0 - e^x}{0-x} = \dfrac{1-e^x}{-x} = \dfrac{-(e^x-1)}{-x} \Rightarrow e^c = \dfrac{e^x-1}{x}$

$c\in(\overset{x<0}{x},0) \to x<c<0 \xrightarrow{e^x \text{ صعودی}} e^x<e^c<e^0=1 \Rightarrow \dfrac{e^x-1}{x}<1 \xRightarrow{x<0} e^x > x+1$

تمرین: 1) $|Arctg\,b - Arctg\,a| < |b-a| \ , \ 0<a<b$ $\quad f(x)=Arctg\,x \ , \ [a,b]$

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

تعمیم مقدار میانگین: $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \dfrac{1}{1+c^2} = \dfrac{Arctg\,b - Arctg\,a}{b-a}$

$0<\dfrac{1}{1+c^2}<1 \to \left|\dfrac{1}{1+c^2}\right|<1 \to \left|\dfrac{Arctg\,b-Arctg\,a}{b-a}\right|<1 \xrightarrow{\times|b-a|} |Arctg\,b - Arctg\,a| < |b-a|$

۴) $\frac{x}{x+1} < Ln(x+1) < x \quad , x>0$

روش اول: $f(x) = Ln(x+1) \ , [0, x] \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x}$

قضیه مقدار میانگین: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \frac{1}{1+c} = \frac{Ln(x+1) - Ln(0+1)}{x-0} = \frac{Ln(x+1)}{x}$ ⊛

$c \in (0, x) \Rightarrow 0 < c < x \rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < \frac{1}{1+0} = 1 \overset{⊛}{\Rightarrow} \frac{1}{1+x} < \frac{Ln(x+1)}{x} < 1 \xrightarrow{\times x} \frac{x}{1+x} < Ln(x+1) < x$

روش دوم: $f(x) = Ln\,x \ , [1, x+1] \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

قضیه مقدار میانگین: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{Ln(x+1) - Ln 1}{x+1-1} = \frac{Ln(x+1)}{x}$ ⊛

$c \in (1, 1+x) \Rightarrow 1 < c < x+1 \rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < 1 \xrightarrow{⊛} \frac{1}{x+1} < \frac{Ln(x+1)}{x} < 1 \xrightarrow{\times x}$

$\frac{x}{x+1} < Ln(x+1) < x$

۵) $|\sin x| \leq |x| \Rightarrow f(x) = \sin x \ , (0, x) \Rightarrow f'(x) = \cos x$

قضیه مقدار میانگین: $\cos c = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{\sin x}{x}$

$-1 \leq \cos c \leq 1 \rightarrow -1 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1 \xrightarrow{\times |x|} |\sin x| \leq |x|$

Year. Month. Date. ( ) Subject:

مثال: هریک از نامساوی‌های زیر را اثبات کنید. (با استفاده از قضیه مقدار میانگین)

1) $\frac{b-a}{1+b^2} < Arctg\,b - Arctg\,a < \frac{b-a}{1+a^2}$ , $0<a<b$   $f(x) = Arctg\,x$ , $[a,b]$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

قضیه مقدار میانگین: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \frac{1}{1+c^2} = \frac{Arctg\,b - Arctg\,a}{b-a}$ ⊛

$c \in (a,b) \Rightarrow a<c<b \Rightarrow \frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2} \overset{⊛}{\Rightarrow} \frac{1}{1+b^2} < \frac{Arctg\,b - Arctg\,a}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$

$\xrightarrow{\times(b-a)} \frac{b-a}{1+b^2} < Arctg\,b - Arctg\,a < \frac{b-a}{1+a^2}$

2) $py^{p-1}(x-y) < x^p - y^p < px^{p-1}(x-y)$ , $0<y<x$ , $p>1$   $f(x) = x^p$ , $[y,x]$

$f'(x) = px^{p-1}$

قضیه مقدار میانگین: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow pc^{p-1} = \frac{x^p - y^p}{x-y}$

$c \in (y,x) \Rightarrow y<c<x \Rightarrow py^{p-1} < pc^{p-1} < px^{p-1} \Rightarrow py^{p-1} < \frac{x^p - y^p}{x-y} < px^{p-1}$

$\xrightarrow{\times(x-y)} py^{p-1}(x-y) < x^p - y^p < px^{p-1}$

3) $\frac{a-b}{a} < Ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ , $0<b<a$   $f(x) = Ln\,x$ , $[b,a]$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

قضیه مقدار میانگین: $\frac{1}{c} = \frac{Ln\,a - Ln\,b}{a-b} = \frac{Ln\frac{a}{b}}{a-b}$

$c \in (b,a) \Rightarrow b<c<a \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b}$

$\Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{Ln\frac{a}{b}}{a-b} < \frac{1}{b} \xrightarrow{\times(a-b)} \frac{a-b}{a} < Ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$

2000

مثال: اگر $\begin{cases} y = t^2 - \sin t \\ x = e^{3t} - \ln t \end{cases}$ باشد، مطلوبست محاسبه $y'$ ؟

$$y' = \frac{2t - \cos t}{3e^{3t} - \frac{1}{t}}$$

## کاربرد مشتق

**قضیه رول:** فرض کنید $f(x)$ یک تابع پیوسته روی بازه $[a,b]$ و مشتق پذیر روی $(a,b)$ باشد و نیز $f(a)=f(b)$، در این صورت $c \in (a,b)$ وجود دارد که $f'(c) = 0$.

مثال: تحقیق کنید کدام یک از توابع زیر در شرایط قضیه رول صدق می‌کند و سپس $c$ را بیابید؟

۱) $f(x) = 1 - |x| \ , \ [-1,1]$ — شرایط قضیه رول صدق نمی‌کند، چون مشتق پذیر نیست

۲) $f(x) = x^2 + 1 \ , \ [-1,1]$ — در شرایط قضیه رول صدق می‌کند $\Leftarrow c = 0$

۳) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1} \ , \ [-2,2]$ $= x = c = 0 \Leftarrow \begin{cases} f'(x) = \frac{(2x)(x^4+1) - (4x^3)(x^2+1)}{(x^4+1)^2} \ , \ f(2) = f(-2) = \frac{5}{17} \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 2x(x^4+1-2x^2(x^2+1)) = 0 \rightarrow x = 0 \end{cases}$

**قضیه مقدار میانگین:** فرض کنید $f(x)$ یک تابع پیوسته روی بازه $[a,b]$ و مشتق پذیر روی $(a,b)$ باشد.

در این صورت:

$$\exists c \in (a,b) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

مثال: آیا توابع زیر شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد؟ اگر دارد، $c$ را بیابید؟

$$f(x) = x^2 \ , \ [3,4] \Rightarrow f'(x) = 2x \ , \ f'(c) = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{16 - 9}{1} = 7$$

$$\Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

Year. Month. Date. ( )

Subject:

تذکر: اگر بین عبارت‌ها، اعمال ضرب و تقسیم وجود داشته باشد، مشتق با $Ln$ گیری از طرفین به راحتی انجام می‌شود.

$$3)\ y=\frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x^2-2)^3}\,\sqrt[3]{(x-3)^7}}=\frac{(x-1)^{\frac{2}{5}}}{(x^2-2)^{\frac{3}{4}}(x-3)^{\frac{7}{3}}}\xrightarrow{Ln} Ln\,y=Ln\frac{(x-1)^{\frac{2}{5}}}{(x^2-2)^{\frac{3}{4}}(x-3)^{\frac{7}{3}}}$$

$$=Ln(x-1)^{\frac{2}{5}}-Ln(x^2-2)^{\frac{3}{4}}-Ln(x-3)^{\frac{7}{3}}=\frac{2}{5}Ln(x-1)-\frac{3}{4}Ln(x^2-2)-\frac{7}{3}Ln(x-3)$$

مشتق

$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{x-1}-\frac{3}{4}\times\frac{2x}{x^2-2}-\frac{7}{3}\times\frac{1}{x-3}\Rightarrow y'=\frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x^2-2)^3}\,\sqrt[3]{(x-3)^7}}\left(\frac{2}{5(x-1)}-\frac{3x}{2(x^2-2)}-\frac{7}{3(x-3)}\right)$$

فرم صریح: $y=f(x)$ ، فرم ضمنی: $f(x,y)=0 \Rightarrow y'=\frac{-F'_x}{F'_y}$

($F'_x$: مشتق نسبت به x با فرض y عدد — $F'_y$: مشتق نسبت به y با فرض x عدد)

مثال: $y'$ را بیابید.

$$1)\ x^3\cos(3y)=2y^3x-tg\,y^2+5\Rightarrow x^3\cos(3y)-2y^3x+tg\,y^2-5=0$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-F'_x}{F'_y}=-\frac{3x^2\cos(3y)-2y^3}{-3x^3\sin(3y)-6xy^2+2y(1+tg^2(y^2))}$$

$$2)\ tg(xy^3)+x^y=Ln(x^2+y^2)\Rightarrow tg(xy^3)+x^y-Ln(x^2+y^2)=0$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{y^3(1+tg^2(xy^3))+yx^{y-1}-\frac{2x}{x^2+y^2}}{3xy^2(1+tg^2(xy^3))+x^y\,Ln\,x-\frac{2y}{x^2+y^2}}$$

مشتق تابع پارامتری: تابعی به شکل $\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$ را تابع پارامتری و t را پارامتر می‌گوییم.

در توابع پارامتری $y'$ از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$y'=\frac{y'_t}{x'_t}$$

2000

۱۳) $y=a^u \Rightarrow y'=u'a^u \ln a$

۱۴) $y=\ln u \Rightarrow y'=\frac{u'}{u}$

۱۵) $y=\sinh u \Rightarrow y'=u'\cosh u$

۱۶) $y=\cosh u \Rightarrow y'=u'\sinh u$

۱۷) $y=\tanh u \Rightarrow y'=u'(1-\tanh^2 u)$

۱۸) $y=\coth u \Rightarrow y'=u'(1-\coth^2 u)$

۱۹) $y=u\pm v \Rightarrow y'=u'\pm v'$

۲۰) $y=\overset{\text{ثابت}}{c}u \Rightarrow y'=cu'$

۲۱) $y=uv \Rightarrow y'=u'v+v'u$

۲۲) $y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

۲۳) $y=|u| \Rightarrow y'=\frac{u'u}{|u|}$

۲۴) $y=u^v \Rightarrow y'=u^v\left(v'\ln u+\frac{u'}{u}v\right)$

مثال ۷: $y=\sec(x^5+\tan x) \Rightarrow y'=(5x^4+1+\tan^2 x)\sec(x^5+\tan x)\tan(x^5+\tan x)$

مثال ۸: $y=\arcsin(\tan x) \Rightarrow y'=\frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$

مثال: $y=(\cos x)^{\sin x} \Rightarrow y'=?$

$y=u^v \Rightarrow y'=u^v\left(v'\ln u+\frac{u'}{u}v\right)$

معمولی: $y'=(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\ln\cos x+\frac{-\sin x}{\cos x}\sin x\right)$

جبری: $y=(\cos x)^{\sin x} \xrightarrow{\ln} \ln y=\ln(\cos x)^{\sin x}=\sin x\ln\cos x \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{y'}{y}=\cos x\ln\cos x+\frac{-\sin^2 x}{\cos x}$

$\Rightarrow y'=(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\ln\cos x-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$

مثال: $y'$ را بیابید.

۱) $y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x} \Rightarrow y'=\frac{(\cos x-\cos x+x\sin x)(\text{مخرج})-(-\sin x+\sin x+x\cos x)(\text{صورت})}{(\cos x+x\sin x)^2}$

۲) $y=\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3} \xrightarrow{\ln} \ln y=\ln\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}=\ln x-\ln(1-x)^2(1+x)^3=\ln x-\ln(1-x)^2-\ln(1+x)^3$

$=\ln x-2\ln(1-x)-3\ln(1+x) \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{y'}{y}=\frac{1}{x}+\frac{2}{1-x}-\frac{3}{1+x} \Rightarrow y'=\left(\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{1-x}-\frac{3}{1+x}\right)$

توابع هیپربولیک (هذلولوی):

سینوس هیپربولیک: $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

کسینوس هیپربولیک: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

تانژانت هیپربولیک: $\operatorname{tgh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

کتانژانت هیپربولیک: $\coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

خواص توابع هیپربولیک:

۱) $\cosh x + \sinh x = e^x$ ۲) $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

۳) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

مشتق:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

فرمول های مشتق گیری: $u$ تابع برحسب $x$ ($u = u(x)$)

| | | |
|---|---|---|
| $y=5 \Rightarrow y'=0$<br>۱) $y = C \Rightarrow y' = 0$ | $y = x^{-3} \Rightarrow y' = -3x^{-4}$<br>۲) $y = u^n \Rightarrow y' = n u^{n-1} u'$<br>$y = x^5 \Rightarrow y' = 5x^4$ | $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$<br>$y = \sin(x^{-2}) \Rightarrow y' = -2x^{-3} \cos x^{-2}$<br>۳) $y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$ |
| $y = \cos(x^{-1}) \Rightarrow y' = -(-1)x^{-2} \sin x^{-1}$<br>۴) $y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$ | $y = \operatorname{tg} x^2 \Rightarrow y' = 2x(1 + \operatorname{tg}^2 x^2)$<br>۵) $y = \operatorname{tg} u \Rightarrow y' = u'(1 + \operatorname{tg}^2 u)$<br>$= u' \sec^2 u$ | ۶) $y = \cot u \Rightarrow y' = -u'(1 + \cot^2 u)$<br>$= -u' \operatorname{cosc}^2 u$ |
| ۷) $y = \sec u \Rightarrow y' = u' \sec u \operatorname{tg} u$ | ۸) $y = \operatorname{Arcsin} u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ | ۹) $y = \operatorname{Arccos} u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| $y = \operatorname{Arctg} x^2 \Rightarrow y' = \dfrac{2x}{1+x^4}$<br>۱۰) $y = \operatorname{Arctg} u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$ | ۱۱) $y = \operatorname{Arccot} u = \dfrac{-u'}{1+u^2}$ | $y = e^{5x^2} \Rightarrow y' = e^{5x^2} \times 10x$<br>۱۲) $y = e^u \Rightarrow y' = u' e^u$<br>$y = e^{(\sin x^2 + 2x)}$<br>$\Rightarrow y' = (2x \cos x^2 + 2)$ |

معرفی توابع نمایی و لگاریتمی: تابع $y=e^x$ را تابع نمایی می‌نامند که در آن $e$ عدد نپر است که $e=2,78$.

| $x$ | $0$ | $1$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $e^x$ | $1$ | $e$ | $0$ | $+\infty$ |

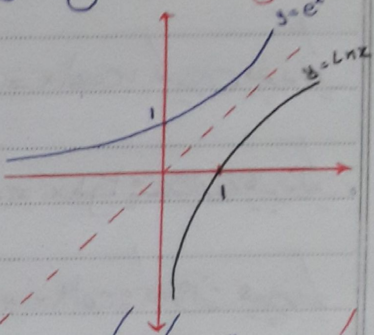
$D_y=R$

$R_y=(0,+\infty)$

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $Lnx$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

$D_y=(0,+\infty)$

$R_y=IR$




نکته: تابع $y=e^x$ یک به یک است پس معکوس دارد و تابع معکوس آن را با $y=Lnx$ نشان می‌دهند.

تذکر: $f(x)=e^x \Rightarrow f^{-1}(x)=Ln(x)$ , $f(f^{-1}(x))=x \Rightarrow e^{Lnx}=x$

$$f^{-1}(f(x))=x \Rightarrow Ln\,e^x=x$$

خواص تابع نمایی و لگاریتمی:

1) $e^{x+y}=e^x e^y$ 2) $Ln(xy)=Lnx+Lny$

3) $Ln\left(\frac{x}{y}\right)=Lnx-Lny$ 4) $Ln\,x^y=y\,Lnx$

مثال: $e^{2Ln3}$ را محاسبه کنید؟

$e^{2Ln3}=e^{Ln9}=9$

مثال: $e^{3Ln2+2Ln5}$ را محاسبه کنید!

$e^{3Ln2+2Ln5}=e^{Ln8+Ln25}=e^{Ln8}\,e^{Ln25}=8\times25=200$

Year. Month. Date. ( ) Subject:

**تمرین:** اگر $z=1+i$ ، ریشه معادله $z^7+az^5+b=0$ باشد، مقادیر حقیقی $\overset{-2}{a}$ و $\overset{-16}{b}$ را بیابید؟

$1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \xrightarrow{()^7} (1+i)^7 = 8\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8-8i$

$\xrightarrow{()^5} (1+i)^5 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = -4-4i$

$8-8i-4a-4ai+b=0 \Rightarrow \begin{cases} -8-4a=0 \Rightarrow a=-2 \\ 8-4a+b=0 \Rightarrow b=-16 \end{cases}$

**تمرین:** برای هر عدد طبیعی $n$ و $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ نشان دهید:

$$\left(\frac{1+i\,tg\alpha}{1-i\,tg\alpha}\right)^n = \frac{1+i\,tg(n\alpha)}{1-i\,tg(n\alpha)}$$

از چپ به راست: $1+i\,tg\alpha \to re^{i\theta} \Rightarrow r=\sqrt{1+tg^2\alpha}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}=\frac{1}{\cos\alpha}$ ، $\theta \overset{\text{ناحیه ۱}}{=} Arctg\left(\frac{+tg\alpha}{1}\right)=\alpha$

$\Rightarrow z=\frac{1}{\cos\alpha}e^{i\alpha} \xrightarrow{()^n} z^n=\left(\frac{1}{\cos\alpha}e^{i\alpha}\right)^n=\frac{1}{\cos n\alpha}e^{in\alpha}=\frac{1}{\cos n\alpha}(\cos n\alpha+i\sin(n\alpha))=1+i\,tg(n\alpha)$

$1-i\,tg\alpha \to re^{i\theta} \Rightarrow r=\sqrt{1+tg^2\alpha}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}=\frac{1}{\cos\alpha}$ ، $\theta \overset{\text{ناحیه ۴}}{=} Arctg\left(\frac{-tg\alpha}{1}\right)=-\alpha$

$\Rightarrow z=\frac{1}{\cos\alpha}e^{-i\alpha} \xrightarrow{()^n} z^n=\left(\frac{1}{\cos\alpha}e^{-i\alpha}\right)^n=\frac{1}{\cos n\alpha}e^{-in\alpha}=\frac{1}{\cos(n\alpha)}(\cos(n\alpha)-i\sin(n\alpha))=1-i\,tg\,n\alpha$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+i\,tg\alpha}{1-i\,tg\alpha}\right)^n=\frac{(1+i\,tg\alpha)^n}{(1-i\,tg\alpha)^n}=\frac{1+i\,tg(n\alpha)}{1-i\,tg(n\alpha)}$$

ج) $z_۰ = -۱ , z_۱ = -e^{i\frac{۲\pi}{۳}} , z_۲ = -e^{i\frac{۴\pi}{۳}}$

$z_۰ = -\sqrt[۳]{۲} , z_۱ = -\sqrt[۳]{۲}\, e^{i\frac{۲\pi}{۳}} , z_۲ = -\sqrt[۳]{۲}\, e^{i\frac{۴\pi}{۳}}$



تمرین: هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt[۳]{-۸i} \Rightarrow z^۳ = -۸i$

$r = \sqrt{۸^۲} = ۸ , \theta \overset{x=۰, y<۰}{=} -\frac{\pi}{۲} , n = ۳$

$z_۰ = \sqrt[۳]{۸}\, e^{i\left(\frac{۲(۰)\pi}{۳} + \frac{-\frac{\pi}{۲}}{۳}\right)} = ۲e^{-i\frac{\pi}{۶}}$

$z_۱ = \sqrt[۳]{۸}\, e^{i\left(\frac{۲(۱)\pi}{۳} + \frac{-\frac{\pi}{۲}}{۳}\right)} = ۲e^{i\frac{\pi}{۲}}$

$z_۲ = \sqrt[۳]{۸}\, e^{i\left(\frac{۲(۲)\pi}{۳} + \frac{-\frac{\pi}{۲}}{۳}\right)} = ۲e^{i\frac{۷\pi}{۶}}$

ب) $z^۵ = ۳۲ \Rightarrow r = \sqrt{۳۲^۲} = ۳۲ , \theta \overset{x>۰}{=} Arctg\left(\frac{۰}{۳۲}\right) = ۰ , n = ۵$

$z_۰ = \sqrt[۵]{۳۲}\, e^{i\left(\frac{۲(۰)\pi}{۵} + \frac{۰}{۵}\right)} = ۲e^{i(۰)} = ۲$

$z_۱ = \sqrt[۵]{۳۲}\, e^{i\left(\frac{۲(۱)\pi}{۵} + \frac{۰}{۵}\right)} = ۲e^{i\frac{۲\pi}{۵}}$

$z_۲ = \sqrt[۵]{۳۲}\, e^{i\left(\frac{۲(۲)\pi}{۵} + \frac{۰}{۵}\right)} = ۲e^{i\frac{۴\pi}{۵}}$

$z_۳ = \sqrt[۵]{۳۲}\, e^{i\left(\frac{۲(۳)\pi}{۵} + \frac{۰}{۵}\right)} = ۲e^{i\frac{۶\pi}{۵}}$

$z_۴ = \sqrt[۵]{۳۲}\, e^{i\left(\frac{۲(۴)\pi}{۵} + \frac{۰}{۵}\right)} = ۲e^{i\frac{۸\pi}{۵}}$

ج) $z^۶ + ۳z^۳ + ۲ = ۰ \xrightarrow{z^۳ = w} w^۲ + ۳w + ۲ = ۰ \rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = ۹ - ۸ = ۱$

$\rightarrow w_{۱,۲} = \frac{-۳ \pm \sqrt{۱}}{۲} = \frac{-۳ \pm ۱}{۲} \Big< \begin{matrix} w_۱ = -۲ \\ w_۲ = -۱ \end{matrix}$

حل معادله $z^۳ = -۲$ :

$r = \sqrt{(-۲)^۲} = ۲ , \theta \overset{x<۰}{=} \pi + Arctg\left(\frac{۰}{-۲}\right) = \pi , n = ۳$

$z_۰ = \sqrt[۳]{۲}\, e^{i\left(\frac{۲(۰)\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳}\right)} = \sqrt[۳]{۲}\, e^{i\frac{\pi}{۳}}$

$z_۱ = \sqrt[۳]{۲}\, e^{i\left(\frac{۲(۱)\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳}\right)} = \sqrt[۳]{۲}\, e^{i\pi}$

$z_۲ = \sqrt[۳]{۲}\, e^{i\left(\frac{۲(۲)\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳}\right)} = \sqrt[۳]{۲}\, e^{i\frac{۵\pi}{۳}}$

حل معادله $z^۳ = -۱$ :

$r = \sqrt{(-۱)^۲} = ۱ , \theta \overset{x<۰}{=} \pi + Arctg\left(\frac{۰}{-۱}\right) = \pi , n = ۳$

$z_۰ = \sqrt[۳]{۱}\, e^{i\left(\frac{۲(۰)\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳}\right)} = e^{i\frac{\pi}{۳}}$

$z_۱ = \sqrt[۳]{۱}\, e^{i\left(\frac{۲(۱)\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳}\right)} = e^{i\pi}$

$z_۲ = \sqrt[۳]{۱}\, e^{i\left(\frac{۲(۲)\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳}\right)} = e^{i\frac{۵\pi}{۳}}$

تمرین: هر یک از عبارات زیر را به صورت $x+iy$ بنویسید.

الف) $\dfrac{2+3i}{3-2i}+\dfrac{3-2i}{2-3i}=\dfrac{(2+3i)(2-3i)+(3-2i)(3-2i)}{(3-2i)(2-3i)}=\dfrac{4-9i^2+9+4i^2-12i}{6-9i-4i+6i^2}$

$=\dfrac{18-12i}{-13i}\times\dfrac{13i}{13i}=\dfrac{13(18i-12i^2)}{-169i^2}=\dfrac{13(18i+12)}{169}\neq\dfrac{12}{13}-\dfrac{18}{13}i$

$=\dfrac{12}{13}+\dfrac{18}{13}i$

ب) $\left(1-\dfrac{1}{2+5i}\right)\left(\dfrac{1-\frac{1}{i}}{2+\frac{5i-1}{3-4i}}\right)=\dfrac{(1+5i)}{(2+5i)}\times\dfrac{(1+7i)}{(3+5i)}=\dfrac{1+7i+5i+35i^2}{6+10i+15i+25i^2}=\dfrac{12i-34}{25i-19}\times\dfrac{25i+19}{25i+19}$

$=\dfrac{300i^2+228i-850i-646}{625i^2+475i-475i-361}=\dfrac{-946-622i}{-984}=\dfrac{2(473+311i)}{2\times 492}=\dfrac{473}{492}+\dfrac{311}{492}i$

$1-\dfrac{1}{i}=\dfrac{i-1}{i}$

$\Rightarrow\dfrac{\frac{i-1}{i}}{\frac{5-3i}{3-4i}}=\dfrac{(i-1)(3-4i)}{i(5-3i)}=\dfrac{3i-4i^2-3+4i}{5i-3i^2}=\dfrac{1+7i}{3+5i}$

$2+\dfrac{5i-1}{3-4i}=\dfrac{6-8i+5i-1}{3-4i}=\dfrac{5-3i}{3-4i}$

$1-\dfrac{1}{2+5i}=\dfrac{2+5i-1}{2+5i}=\dfrac{1+5i}{2+5i}$

ج) $(\sqrt{3}-i)^3=(2e^{-i\frac{\pi}{6}})^3=8e^{-i\frac{\pi}{2}}=8(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2})=-8i$

$\sqrt{3}-i\longrightarrow re^{i\theta}\Rightarrow r=\sqrt{3+1}=2\ ,\ \theta\overset{\text{ربع ۴}}{=}Arctg(\frac{-1}{\sqrt{3}})=-Arctg(\frac{\sqrt{3}}{3})=-\frac{\pi}{6}$

د) $\dfrac{(1-i)^2(3+i\sqrt{3})^3}{(-1+i\sqrt{3})^4}=\dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{2}}\times 24e^{i\frac{3\pi}{4}}}{16e^{i\frac{8\pi}{3}}}=3\dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{8\pi}{3}}}=3e^{i\frac{29\pi}{12}}$

$-1+i\sqrt{3}\longrightarrow re^{i\theta}\Rightarrow r=\sqrt{3+1}=2\ ,\ \theta\overset{\text{ربع ۲}}{=}\pi+Arctg(\frac{\sqrt{3}}{-1})=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\longrightarrow z=2e^{i\frac{2\pi}{3}}\Rightarrow z^4=16e^{i\frac{8\pi}{3}}$

$1-i\longrightarrow re^{i\theta}\Rightarrow r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\ ,\ \theta\overset{\text{ربع ۴}}{=}Arctg(\frac{-1}{1})=-\frac{\pi}{4}\Rightarrow z=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\longrightarrow z^2=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$3+i\sqrt{3}\longrightarrow re^{i\theta}\Rightarrow r=\sqrt{3+9}=2\sqrt{3}\ ,\ \theta\overset{\text{ربع ۱}}{=}Arctg(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{\pi}{4}\Rightarrow z=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}\longrightarrow z^3=24\sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Year. Month. Date. ( ) Subject:

**تذکر:** برای بدست آوردن ریشه‌های معادلهٔ $z^n = w$، باید ابتدا $w$ را به صورت قطبی بنویسیم و سپس از فرمول گفته شده استفاده می‌کنیم.

**مثال:** ریشه‌های معادلهٔ $z^2 = i$ را بیابید؟

$i \longrightarrow re^{i\theta} \Rightarrow n=2,\ r=\sqrt{0+1}=1,\ \theta \xrightarrow{x=0,\,y>0} \frac{\pi}{2}$

$z_0 = \sqrt{1}\, e^{i\left(\frac{2(0)\pi}{2}+\frac{\pi/2}{2}\right)} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_1 = \sqrt{1}\, e^{i\left(\frac{2(1)\pi}{2}+\frac{\pi/2}{2}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

**تذکر:** $\sqrt[n]{w}$ همان ریشه‌های معادلهٔ $z^n = w$ است.

**مثال:** $\sqrt[4]{-16}$ را در اعداد مختلط حساب کنید!

$z^4 = -16 \Rightarrow -16 \longrightarrow re^{i\theta}$

$r = \sqrt{(-16)^2 + 0} = 16,\ \theta \xrightarrow{x<0} \pi + \mathrm{Arctg}\left(\frac{0}{-16}\right) = \pi,\ n=4$

$z_0 = \sqrt[4]{16}\, e^{i\left(\frac{2(0)\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_1 = \sqrt[4]{16}\, e^{i\left(\frac{2(1)\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z_2 = \sqrt[4]{16}\, e^{i\left(\frac{2(2)\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$z_3 = \sqrt[4]{16}\, e^{i\left(\frac{2(3)\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{4}}$

**مثال:** ریشه‌های معادلهٔ $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$ را بیابید!

$z^2 = w \Rightarrow w^2 - 2w + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 16 = -12,\ w_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-12 = 12i^2}}{2} = 1 \mp \sqrt{3}\, i = z^2$ ($\sqrt{-12} = 2\sqrt{3}i$)

حل معادلهٔ $z^2 = 1 + \sqrt{3}\, i$:

$1 + \sqrt{3}\, i \longrightarrow re^{i\theta} \Rightarrow n=2,\ r = \sqrt{1+3} = 2,\ \theta \xrightarrow{x>0} \mathrm{Arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$

$z_0 = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{2(0)\pi}{2}+\frac{\pi/3}{2}\right)} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{2(1)\pi}{2}+\frac{\pi/3}{2}\right)} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

حل معادلهٔ $z^2 = 1 - \sqrt{3}\, i$:

$1 - \sqrt{3}\, i \longrightarrow re^{i\theta} \Rightarrow n=2,\ r = \sqrt{1+3} = 2,\ \theta \xrightarrow{x>0} \mathrm{Arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}$

$z_0 = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{2(0)\pi}{2}+\frac{-\pi/3}{2}\right)} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{2(1)\pi}{2}+\frac{-\pi/3}{2}\right)} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

2000

$$\Rightarrow \frac{(1+i\sqrt{3})^4(1-i)^5}{(1-i\sqrt{3})^3(1+i)^4}=\frac{2^4 e^{i\frac{4\pi}{3}}\times 4\sqrt{2}\,e^{-\frac{5\pi}{4}i}}{8e^{-\pi i}\times 4e^{i\pi}}=2\sqrt{2}\,\frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{e^{0}}=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\xrightarrow{*}=2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}\right)$$

$$*\begin{cases}\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\\ \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\end{cases}$$

چندجمله‌ای مختلط: چندجمله‌ای $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ را چندجمله‌ای مختلط گوییم هرگاه $a_0,\dots,a_n$ اعداد مختلط باشند.

معادله دوجمله‌ای مختلط: معادله $z^n=w$ را یک معادله دوجمله‌ای مختلط از درجه n گوییم که در آن w عدد مختلط معلوم و z عدد مختلط مجهول است.

حل معادله $z^n=w$: فرض کنید $w=re^{i\theta}$ و $z=\rho e^{i\alpha}$:

$$z^n=w\Rightarrow(\rho e^{i\alpha})^n=re^{i\theta}\Rightarrow\rho^n e^{in\alpha}=re^{i\theta}=re^{i(2k\pi+\theta)}$$

$$\Rightarrow \rho^n=r \text{ و } n\alpha=2k\pi+\theta\ ;\ k=0,\pm1,\dots\Rightarrow\rho=\sqrt[n]{r} \text{ و } \alpha=\frac{2k\pi}{n}+\frac{\theta}{n}\ ;\ k=0,\pm1,\dots$$

بنابراین تعداد ریشه‌های معادله دوجمله‌ای $z^n=w$ برابر n است که آن‌ها را با $z_k$ نشان داده و از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$z_k=\sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{\theta}{n}\right)}\ ;\ k=0,\pm1,\dots,n-1$$

**مثال:** عدد مختلط $\frac{(1-i)^3}{(1+i)^4}$ را بصورت دکارتی بنویسید!

$1-i \longrightarrow re^{i\theta}$

$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow z=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \xrightarrow{(\ )^3} (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^3 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ ①

$\theta = \text{Arctg}(\frac{-1}{1}) = -\frac{\pi}{4}$

$1+i \longrightarrow re^{i\theta}$

$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \xrightarrow{(\ )^4} (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^4 = 4e^{i\pi}$ ②

$\theta = \text{Arctg}(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4}$

$\xrightarrow{1,2} \frac{(1-i)^3}{(1+i)^4} = \frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{4e^{i\pi}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(\frac{7\pi}{4}) - i\sin(\frac{7\pi}{4})\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i(-\frac{\sqrt{2}}{2})\right)$ ($\frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$)

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

**مثال:** $\frac{(1+i\sqrt{3})^4(1-i)^5}{(1-i\sqrt{3})^3(1+i)^4}$ را بصورت $x+iy$ بنویسید!

$1+i\sqrt{3} \longrightarrow re^{i\theta}$

$r=\sqrt{1+3}=2$

$\theta = \text{Arctg}(\frac{\sqrt{3}}{1}) = \frac{\pi}{3}$

$\longrightarrow z=2e^{i\frac{\pi}{3}} \xrightarrow{(\ )^4} (2e^{i\frac{\pi}{3}})^4 = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$1-i \longrightarrow re^{i\theta}$

$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\theta = \text{Arctg}(\frac{-1}{1}) = -\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow z=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \xrightarrow{(\ )^5} (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^5 = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{4}}$

$1-i\sqrt{3} \longrightarrow re^{i\theta}$

$r=\sqrt{1+3}=2$

$\theta = \text{Arctg}(\frac{-\sqrt{3}}{1}) = -\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow z=2e^{-i\frac{\pi}{3}} \xrightarrow{(\ )^3} (2e^{-i\frac{\pi}{3}})^3 = 8e^{-i\frac{3\pi}{3}}$

$1+i \longrightarrow re^{i\theta}$

$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\theta = \text{Arctg}(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \xrightarrow{(\ )^4} (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^4 = 4e^{i\pi}$

Year. Month. Date. ( ) Subject:

ج) $Z = 1 - i$ → $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$
→ $\theta \overset{x>0}{=} Arctg(\frac{-1}{1}) = -Arctg 1 = -\frac{\pi}{4}$ ⇒ $Z = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

د) $Z = \sqrt{3} + 3i$ → $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3 + 9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ⇒ $Z = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$
→ $\theta \overset{x>0}{=} Arctg(\frac{3}{\sqrt{3}}) = Arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

توان رساندن یک عدد مختلط: ابتدا آن را به فرم قطبی می‌نویسیم وسپس از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

فرمول دموآور: $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

یادآوری: فرض کنید $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ در این صورت:

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ ، با $\theta = \frac{\pi}{6}$: $\sin(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ ، با $\theta = \frac{\pi}{4}$: $\sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، با $\theta = \frac{\pi}{3}$: $\sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ ،

$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$ ،

$\cos(-\theta) = \cos\theta$ ،

$\cos(2k\pi + \theta) = \cos\theta$ ،

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\sin(2k\pi + \theta) = \sin\theta$

$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

بنابراین: $e^{i(2k\pi + \theta)} = e^{i\theta}$

مثال: $(1+i)^{100}$ را به دست آورید.

$1 + i \longrightarrow re^{i\theta}$

$r = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$\theta \overset{x>0}{=} Arctg(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow Z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow (1+i)^{100} = (\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}})^{100} = 2^{50} e^{i25\pi} = 2^{50}(\cos 25\pi + i\sin 25\pi)$ ($25\pi = 2k\pi + \theta$)

$= 2^{50}(-1 + i(0)) = -2^{50}$

2000

| $\theta$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $Arctg\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |

تذکر: $Arctg(-\theta) = -Arctg\theta$

مثال: عدد مختلط $z=3-i\sqrt{3}$ را به فرم قطبی بنویسید؟

$$z=3-i\sqrt{3} \xrightarrow{?} z=re^{i\theta}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow z=2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$\theta \xrightarrow{x>0} Arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

مثال: عدد مختلط $z=-1-i$ را به فرم قطبی بنویسید؟

$$z=-1-i \xrightarrow{?} z=re^{i\theta}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow z=\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$\theta \xrightarrow{x<0} \pi + Arctg\left(\frac{-1}{-1}\right) = \pi + Arctg 1 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

تمرین:

$$(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

تمرین:

$$\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

تمرین: اعداد زیر را به فرم قطبی بنویسید؟

الف) $z=4i$ → $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{16}=4$ ، $\theta \xrightarrow{x=0,\, y>0} \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow z=4e^{i\frac{\pi}{2}}$

ب) $z=-2i$ → $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4}=2$ ، $\theta \xrightarrow{x=0,\, y<0} -\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow z=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Year. Month. Date. ( ) Subject:

تذکر: $e^{i\theta}$ و $e^{-i\theta}$ مزدوج یکدیگرند

تبدیل نمایش قطبی به نمایش دکارتی: از فرمول اویلر استفاده می کنیم

$$z = re^{i\theta} \xrightarrow{?} z = x + iy$$

مثال: عدد مختلط $z = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ را به صورت دکارتی بنویسید

$$z = re^{-i\theta} \xrightarrow{?} z = x + iy$$

$$z = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

مثال: عدد مختلط $z = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$ را به صورت دکارتی بنویسید

$$z = re^{i\theta} \xrightarrow{?} z = x + iy$$

$$z = 3e^{i\frac{\pi}{3}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

تبدیل نمایش دکارتی به قطبی:

$$z = x + iy \xrightarrow{?} z = re^{i\theta}$$

از فرمول های زیر استفاده می کنیم:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \pi + \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0,\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

2000

تذکر: $z\bar{z}=|z|^2$

اثبات: $\begin{cases} z = x+iy \\ \bar{z} = x-iy \end{cases} \Rightarrow z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - ixy + ixy + y^2 = x^2+y^2 = |z|^2$

$\Rightarrow z\bar{z} = |z|^2$

تمرین:

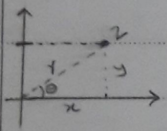
$$\frac{2(\frac{3}{2}-i)+(1+i)(2-i)}{(\sqrt{3}-i)^2} = \frac{(3-2i)+(2-i+2i-i^2)}{3-2\sqrt{3}i+i^2} = \frac{6-i}{2-2\sqrt{3}i} \times \frac{2+2\sqrt{3}i}{2+2\sqrt{3}i}$$

$(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}-i)$

$$= \frac{12+12\sqrt{3}i-2i-2\sqrt{3}i^2}{4-12i^2} = \frac{12+12\sqrt{3}i}{16} + \frac{2\sqrt{3}-2i}{16} \neq \left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{8}i\right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{8}i\right)$$

$$= \left(\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}i\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}i\right)$$

نمایش قطبی اعداد مختلط:




$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta$

$\Rightarrow z = x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \Rightarrow$ نمایش قطبی: $z = re^{i\theta}$

نکته: فرمول اویلر: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

تذکر: در نمایش قطبی $z = re^{i\theta}$، r را قدر مطلق z می‌نامیم. زیرا $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = |z| = r$

همچنین θ را آرگومان z می‌نامیم و با نماد Arg(z) نشان می‌دهیم.

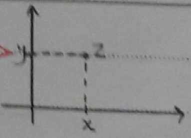
مثال: $e^{-i\theta}$ را به دست آورید.

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \xrightarrow{\theta=-\theta} e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

$\Rightarrow e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

۱) نمایش اعداد مختلط (دکارتی):

$z = x + iy \Rightarrow$

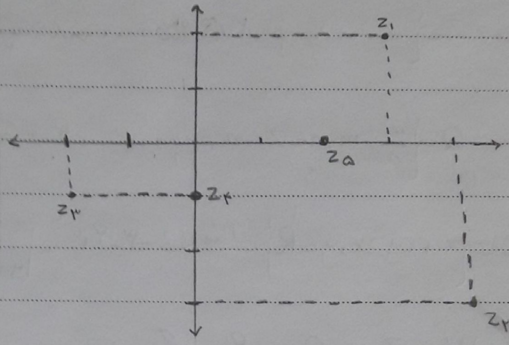


مثال: هریک از اعداد مختلط زیر را بصورت دکارتی نشان دهید؟

$z_1 = 3+2i$ , $z_2 = 4-3i$

$z_3 = -2-i$ , $z_4 = -i$

$z_5 = 2$



عملیات روی اعداد مختلط:

۱) جمع دو عدد مختلط: حقیقی ها ($x$) باهم و موهومی ها ($y$) را باهم جمع می کنیم

۲) ضرب دو عدد مختلط: مؤلفه به مؤلفه ضرب کرده و از $i^2=-1$ استفاده می کنیم

۳) تقسیم دو عدد مختلط: صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم

مثال: فرض کنید $z_1 = 2-i$ و $z_2 = 3+2i$ مطلوبست محاسبه $z_1+z_2$ ، $2z_1-3z_2$ ، $z_1z_2$ ، $\frac{z_1}{z_2}$ ؟

$z_1+z_2=(2-i)+(3+2i)=5+i$

$2z_1-3z_2=2(2-i)-3(3+2i)=(4-2i)-(9+6i)=-5-8i$

$z_1z_2=(2-i)(3+2i)=6+4i-3i-2i^2=8+i$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(2-i)}{(3+2i)}\times\frac{(3-2i)}{(3-2i)}=\frac{6-4i-3i+2i^2}{9-6i+6i-4i^2}=\frac{4-7i}{13}=\frac{4}{13}-\frac{7}{13}i$

Year. Month. Date. ( ) Subject: فصل اول: اعداد مختلط

فلسفه‌ی پیدایش اعداد مختلط: $W=\{0,1,2,\dots\}$ حسابی و $\bar{N}=\{1,2,3,\dots\}$ طبیعی

در اعداد حسابی ریشه ندارد $\Leftarrow x=-2 \Leftarrow x+2=0$ و $x-2=0 \Rightarrow x=2\in W$

در اعداد صحیح ریشه ندارد $x=\frac{-5}{2} \Leftarrow 2x+5=0$ و $Z=\{\dots,-1,0,1,\dots\}$ صحیح

$i^2=-1 \xleftarrow{\text{اسم ریشه } i} x^2+1=0$ ، $R=Q\cup Q^c$ حقیقی ، $Q=\{\frac{m}{n}: m,n\in Z,\ n\neq 0\}$ گویا (گنگ)

مجموعه اعداد مختلط ($\mathbb{C}$): $\mathbb{C}=\{x+iy: x,y\in R\}$ مثال: $Z=3-2i \Rightarrow \begin{cases}x=3\\ y=-2\end{cases}$

تذکر: $N\subseteq W\subseteq Z\subseteq Q\subseteq R\subseteq \mathbb{C}$

تعریف: فرض کنید $Z=x+iy$ باشد. در این صورت:

قسمت موهومی $Z$: $Im(Z)=y$ قسمت حقیقی $Z$: $Re(Z)=x$

قدر مطلق $Z$: $|Z|=\sqrt{x^2+y^2}$ مزدوج $Z$: $\bar{Z}=x-iy$

مثال: فرض کنید $Z=\sqrt{2}+\frac{5}{6}i$ ، $Re(Z)=\sqrt{2}$ ، $Im(Z)=\frac{5}{6}$

$\bar{Z}=\sqrt{2}-\frac{5}{6}i$ ، $|Z|=\sqrt{2+\frac{25}{36}}=\sqrt{\frac{97}{36}}=\frac{\sqrt{97}}{6}$